

Drehimpuls: $|L| \sim \sqrt{\ell(\ell+1)} \hbar$

$L_z \sim m \hbar$ (nicht $n \hbar$)

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|}$$

$$H \psi = E \psi$$

Bem: $[\hat{H}, \hat{L}^2] = 0$

\Rightarrow Energi und Gesamt Drehimpuls gleichzeitig messbar

$$[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$$

$$[\hat{L}^2, L_z] = 0$$

Lösung (ohne Herleitung) (in Kugelkoordinaten)

Eigenfkt:

$$\psi_{n,\ell,m}(r, \theta, \varphi) = Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \cdot R_{n,\ell}(r)$$

Hauptquantenzahl

Drehimpulsquantenzahl

Magnetquantenzahl

χ_m : Kugelflächenfkt.

und dem Radialanteil

$$R_{n,\ell}(r) = N_{n,\ell} e^{-\chi_m r} r^\ell L_{n-\ell}^{2\ell+1}(2\chi_m r)$$

mit dem moseley Radius

$$L_{n-\ell}^{2\ell+1} = \frac{d^{2\ell+1}}{dx^{2\ell+1}} L_{n-\ell}$$

$$\chi_m = \frac{1}{n} \frac{1}{r_1}$$

erste Bohrsche Radius

$$= a_B \approx 0,0529 \text{ nm}$$

und dem Lagerschen Polynom (LAGUERRE)

$$L_{n+1}(x) = e^x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x} x^{n+1})$$

$$L_n = e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$$

und dem Normierungsfaktor

$$\int_0^{\infty} R_{n\ell}^2(r) r^2 dr \stackrel{!}{=} 1$$

und den Quantenzahlen

$n = 1, 2, 3 \dots$
$0 \leq \ell \leq n-1$
$-\ell \leq m_\ell \leq \ell$

Hauptquantenzahl

Drehimpulsquantenzahl

magn. Quantenzahl

Eigenwerte

$$E_{n,\ell,m} = E_n = - \frac{e^4 m}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = - \frac{R_y}{n^2}$$

↑
Entartung der Eigenwerte

d.h. der Eigenwert hängt nur von der Hauptquantenzahl ab - nicht von ℓ und m

Zu jeder Energie E_n gibt es

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} 2\ell + 1 = n^2$$

unterschiedliche Eigenfunktionen

Beispiel

$$R_{10} \propto e^{-\frac{r}{a_B}}$$

$$R_{20} \propto e^{-\frac{r}{2a_B}} \left(2 - \frac{r}{a_B}\right)$$

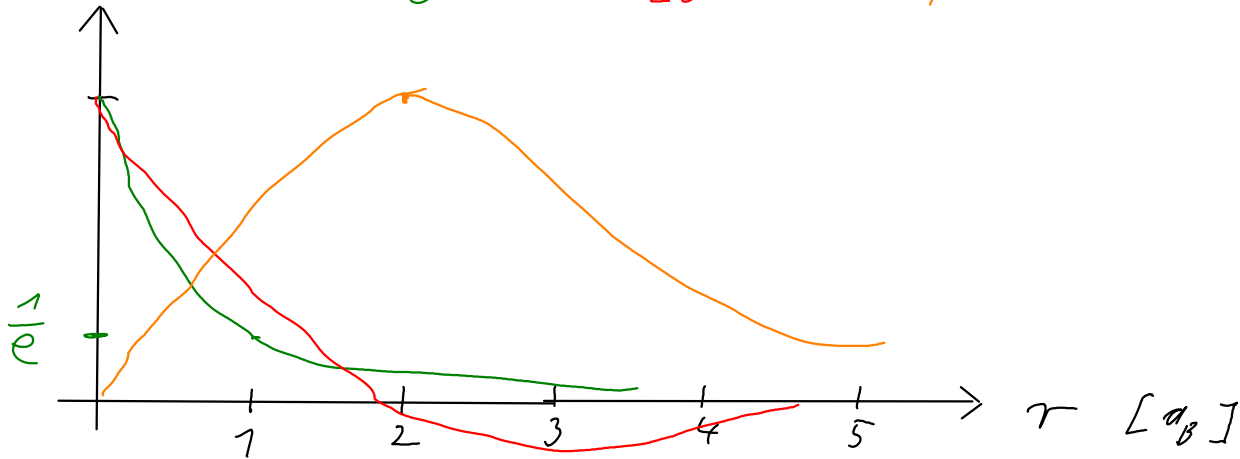
$$R_{21} \propto e^{-\frac{r}{2a_B}} \left(\frac{r}{a_B} \right)$$

Graphisch

R_{10}

R_{20}

R_{21}



Wahrscheinlichkeit ist $(r \cdot R)^2$

Beispiel:

$$n=1 \quad (l=0, m=0)$$

Bei welchem Radius ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit maximal?

$$\propto r^2 |\psi|^2$$

↑
neg. $\iint d\varphi d\theta$ Kugelkoordinaten

$$\frac{d}{dr} \left(e^{-\frac{2r}{a_B}} \right) = 0$$

$$= r^2 \left(-\frac{2}{a_B} \exp\left(-\frac{2r}{a_B}\right) \right) + \exp\left(-\frac{2r}{a_B}\right) \cdot 2r$$

$$= \underbrace{\exp\left(-\frac{2r}{a_B}\right)}_{\neq 0} \left(2r - r^2 \frac{2}{a_B} \right)$$

$$\Rightarrow 2r - r^2 \frac{2}{a_B} = 0$$

$$\Rightarrow r = a_B$$

1. Bohrscher Radius

2.4.3 Magnetisches Moment und Zeeman-Energie

Elektron hat Drehimpuls + Ladung
 \Rightarrow magnetische Dipolmoment

Klassisch

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ &= m \vec{r} \times \vec{v} \\ &= m \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\end{aligned}$$

Bewegung in $x-y$ Ebene

$$L = L_z = m \omega r^2$$

Magnet. Moment = Strom \cdot Fläche = μ

$$\begin{aligned}&\frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} \\ &= -e \frac{\omega}{2\pi}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu = -e \frac{\omega}{2\pi} \cdot \pi r^2 = -\frac{1}{2} e \omega r^2$$

$$= -L_z \frac{e}{2m}$$

QM

$$= m_L \hbar$$

\Rightarrow magnet. Moment

$$\mu = -m_L \cdot g_L \cdot \mu_B$$

mit dem Bohrschen Magneton

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2m_e} \approx 9,732 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2$$

und dem g -Faktor

$$g_L = 1$$

(später für Spin $g = \pm \frac{1}{2}$)

Stem-Gedach - Versuch (Folio)
magn. Dipol-Moment läßt sich separieren
mit inhomogenem Magnetfeld

Stem-Gedach Versuch

In einem inhomogenen (statisches) Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$
wirkt auf einen magn. Dipol $\vec{\mu} = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$
eine Kraft.

$$\vec{F} = - \vec{\nabla} V$$

mit der pot. Energi V

$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

\Rightarrow Nachweis der Richtungsquantelung bzw.
des diskreten magnet. Moments von Atomen
(wundbar)

aber:

auch für $L=0 \Rightarrow m_L = 0$ (also $\langle L_z \rangle = 0$)
wird kein Effekt erwartet.

Man misst aber ein Moment von $\pm \mu_B$

\Rightarrow Elektron hat auch einen Drehimpuls.
verknüpft mit magnet. Moment