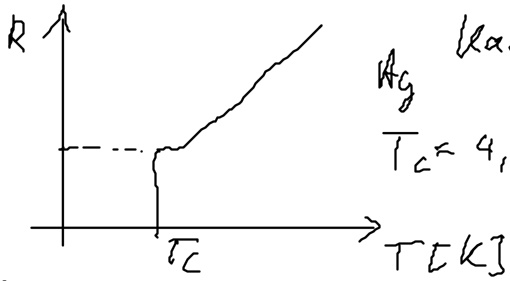
12. Grundbegriffe der Supraleitung

12.1 Idealer Leiter und idealer Diamagnet

• Supraleitung

T_c: Sprungtemp.



Kammerlingh-Onnes **1911**

• konventionelle Widerstandsmessung: $\frac{R_s}{R_N} < 10^{-4}$

• Dauerstromversuch

Vorkommen

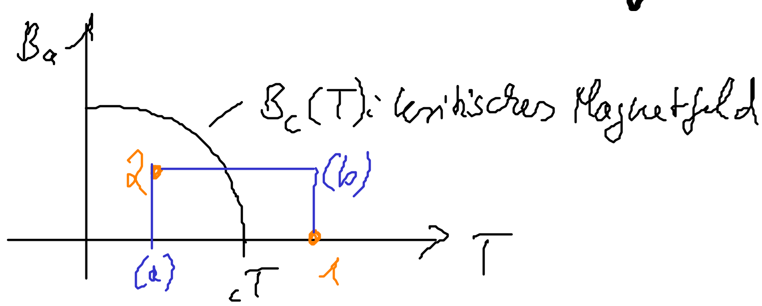
• die meisten elementaren Metalle

• viele 1000 Legierungen

1986	CuO_2-Supraleiter	Bednorz, Müller	$T_{c\,max} \gtrsim 130K$
2001	MgB_2	Akimitsu	$T_c \sim 39K$
2008	FeAs-Ebenen	Kamihara	$T_c \sim 55K$

äußeres Magnetfeld unterdrückt Supraleitung

qualitativ



idealer Leiter 2 Wege von $1 \rightarrow 2$

a) Kühlen in $B_a = 0$, dann Feld ein: im Inneren $B = 0$, da Dauerstrom Feldeindringung verhindert

b) Feld ein, dann Abkühlen: im Inneren $B = B_a$

• Zustand eines idealen Leiters im Magnetfeld ist abhängig von Vorgeschichte

Meißner-Ochsenfeld (1933)

Im Inneren eines homogenen Supraleiters ist immer $B = 0$, unabh. von Vorgeschichte, also $\chi = -1$; $B = \mu_0(H+M)$; $\chi = \frac{\mu_0 M}{B_a}$; $B_a = \mu_0 H$

Einschränkungen:

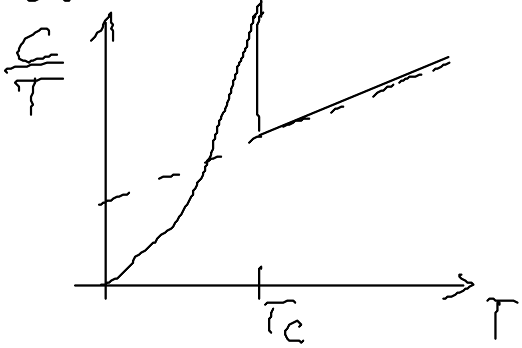
① gilt für alle Felder $B<B_c$ nur für sog. Supraleiter (SL) 1. Art

② gilt nur für dünne Oberflächenschicht, in der SL-Dauerstrom fließt

③ gilt nur für stabförmige Proben $\parallel B_a$ (sonst Entmagnetisierungseffekt)

Fazit: SL ist Gg-Zustand im Sinne der Thermodynamik

spez. Wärme



12.2 London-Gleichungen

- Beschreiben $R=0$ und $B=0$
- Bgl für Elektronen im elektr. Feld $\vec{E}$: $\boxed{m\dot{\vec{v}}+\frac{m}{\tau}\vec{v}=-e\vec{E}}$

  τ = mittlere Stoßzeit
- Für supraleitende Elektronen: $\tau\to\infty$ da $\rho=0$

$\Rightarrow m\dot{\vec{v}}=-e_s\vec{E}$ mit $\vec{j}_s=-e_s n_s\vec{v}_s$; $\Lambda=\frac{m_s}{n_s e_s^2}$

$$\boxed{\frac{\partial(\Lambda\vec{j}_s)}{\partial t}=\vec{E}}$$ **1. London-Gleichung**

- BCS-Theorie: „SL-Elektronen" Cooper-Paare, Ausdruck für Λ identisch

Mit $\mathrm{rot}\,\vec{E}=-\dot{\vec{B}}$ $\quad\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{rot}\left(\Lambda\vec{j}_s\right)+\vec{B}\right)=0}$ (*)

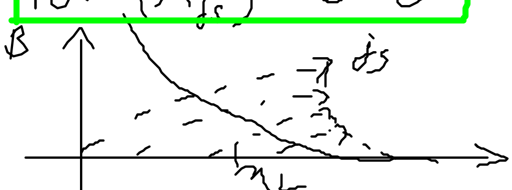
Mit $\mathrm{rot}\,\vec{B}=\mu_0 j_s+\dot{\vec{D}}$ vernachlässigen

$\Rightarrow \nabla^2\dot{\vec{B}}=\frac{\mu_0}{\Lambda}\dot{\vec{B}}$ $\quad\dot{\vec{B}}$ nimmt exponentiell ins Innere des Leiters ab

$$\boxed{\dot{\vec{B}}(x)=\dot{\vec{B}}_a\exp\left[-\frac{x}{\lambda_L}\right]}\qquad \lambda_L=\sqrt{\frac{\Lambda}{\mu_0}}=\frac{1}{e_s}\sqrt{\frac{m_s}{n_s\mu_0}}$$

M-O-Effekt beschrieben durch (*), wenn man Int.konstante $=0$ setzt:

$$\boxed{\mathrm{rot}\left(\Lambda\vec{j}_s\right)+\vec{B}=0}$$ **2. London-Gleichung**



Bem: $\lambda_L(T) \sim \frac{1}{\sqrt{n_s}}$ Typisch $\lambda_L(0) \sim 100$ Å

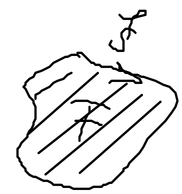
- London-Gleichungen implizieren Existenz einer makroskop. Wellenfkt ψ mit $\psi^*\psi = n_s$
- Suprastromdichte $\boxed{\vec j_s = -\frac{1}{2}\frac{e_s}{m_s}\left(\psi^*(-i\hbar\nabla + e_s\vec A)\psi + \psi(-i\hbar\nabla + e_s\vec A)\psi^*\right)}$
- Falls ψ räuml. konst.:

$$\vec j_s = -\frac{e_s^2}{m_s}\psi^*\psi\vec A = -\frac{e_s^2 n_s}{m_s}\vec A = -\Lambda^{-1}\vec A$$

mit rot $\vec A = \vec B$ folgt 2. Lond.-Gl.

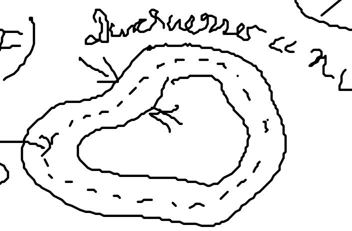
Konsequenz: Flussquantisierung

Bohr-Sommerfeld: $\oint p\, d\vec s = n h$ $n = 1, 2, 3, \dots$



im Magnetfeld: $\oint m_s \vec v_s\, d\vec s - e_s\oint \vec A\, d\vec s = n h$

$\oint \vec A\, ds \ldots = \oint B\, dF = \phi_F$ (magnet. Fluss durch F)



$$\boxed{-\frac{nh}{e_s} = \oint \frac{m_s}{n_s e_s^2}\vec j_s\, d\vec s + \phi_F}$$

Im Innern $\vec j_s = 0 \Rightarrow$ Flussquantisierung

$$\boxed{\phi_F = n\frac{h}{2e} = n\phi_0}$$ mit $\phi_0 = \frac{h}{2e} = 2{,}07 \cdot 10^{-15}$ Vs

a) Elektronenpaare tragen SL

b) Phasenrelation der Cooper-Paare

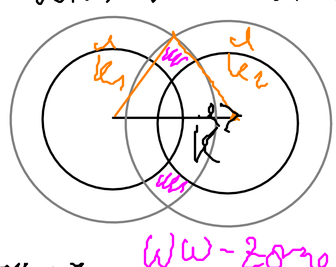
11.3 Cooper-Paare

Im klassischen SL: attraktive WW zwischen Elektr. vermittelt durch Gitterschwingungen retardiert

Im unkonvention. SL: attraktive WW zw. Elektr. durch (magn. Anregung ?)

Modell freier Elektronen, $T=0 \Rightarrow$ alle Zustände bis E_F besetzt

- addiere 2 Elektr., die miteinander, aber nicht mit Fermi-See wechselwirken
- Gesamtimpuls $\boxed{\hbar\vec K = \hbar\vec k_1 + \hbar\vec k_2}$
- max Phasenraumvolumen für attraktive WW, wenn $\vec K = 0 \Rightarrow \vec k_1 = -\vec k_2 = \vec k$



- Wechselwirkung $V_{\vec k\vec k'} = \int V(\vec r)\exp[i(\vec k - \vec k')\vec r]\, d\vec r$

Cooper-Annahme: $V_{\vec k\vec k'} = -V_0 =$ const im Energiebereich bei $\hbar\omega_c$ um E_F

2-Elektr.-Wellenfkt nach Ebenen entwickelt, eingesetzt in Schrödgl. mit $V(\vec r)$

⇒ Konsistenzgl.: $\boxed{\frac{1}{V_0} = \frac{1}{\Omega_0} \sum_{\vec k > k_F} (2E_{\vec k} - E)^{-1}}$

• schwache Kopplung: $D(E_F)V_0 \ll 1$

• Energie des 2-El.-Zustands: $\boxed{E \approx 2E_F - 2\hbar\omega_c \exp\left[-\frac{2}{D(E_F)V_0}\right]}$

⇒ Energieabsenkung! Gebundener Zustand „Cooper-Paar"

⇒ Instabilität des Fermi-Sees ⇒ BCS-Wellenfkt.

• „Ausdehnung" eines Cooperpaares: $\xi_{C_0} = \frac{a\hbar v_F}{kT_c}$ $a = 0{,}18$ (BCS)

Beispiel Al $T_c = 1{,}2\,K$, $\xi_{C_0} = 2{,}3\,\mu m$ „BCS-Kohärenzlänge"

• Für einfache $V_{\vec k \vec k'} = -V_0$:

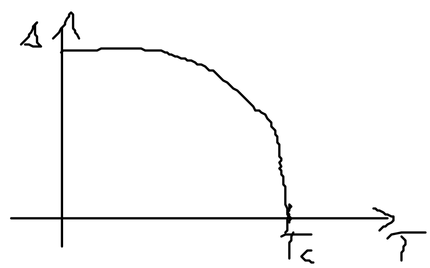
⇒ Ortsanteil der 2-El-WW symm: Spinanteil antisym. $\vec S = 0$ $\langle \vec k\uparrow, -\vec k\downarrow\rangle$

• komplizierte WW:

⇒ $\vec S = 1$ prinzipiell möglich (^3He: Suprafluid ~ 2 mK)

Wesentliche Konsequenzen aus der BCS-Theorie

① Energielücke für Anregungen/Quasiteilchen
z.B. aus spez. Wärme,
Mikrowellenabsorption bei $\hbar\omega > 2\Delta$



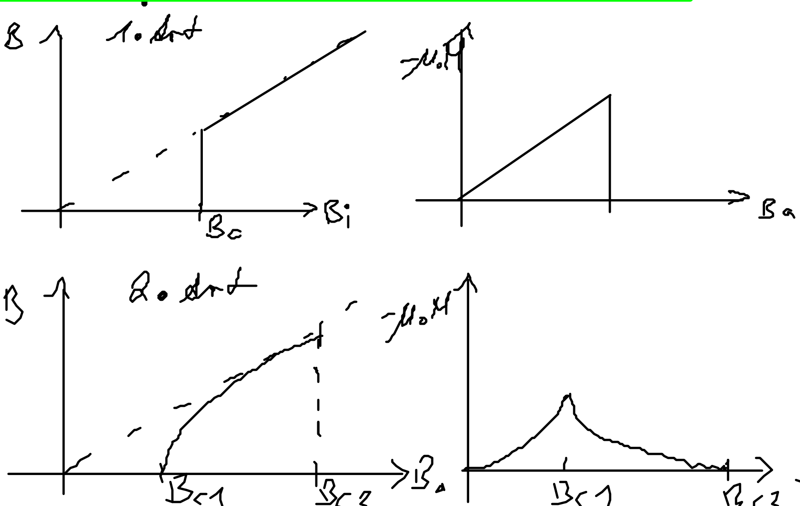
② $kT_c = 1{,}13\,\hbar\omega_c \exp\left[-\frac{1}{D(E_F)V_0}\right]$

El-Ph-Kopplung: $\hbar\omega_c \approx \hbar\omega_D$ (Debye)

③ London-Gl aus BCS-Theorie herleitbar

④ Josephson-Effekt: Kopplung zw. zwei SL: Austausch von Cooper-Paaren: Phase wichtig.

11.4 Supraleiter 1. und 2. Art



B_{c1}: unteres krit. Feld

B_{c2}: oberes krit. Feld

Flussschläuche mit

wichtig: $\frac{n_c}{\xi}$