Boltzmann Verteilungsfunktion $f(\vec r, \vec p, t)$

Gleichgewicht $f^0(\dots) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_0-\mu}{k_B T}}+1}$

Elektrische Dichte $n(\vec r,t) = \frac{1}{V}\sum_{\vec p\sigma} f(\vec r,\vec p,t)$

Stromdichte $\vec j(\vec r,t) = \frac{1}{V}\sum_{\vec p\sigma} e\,\vec v_p f(\dots)$; $\vec v_p = \nabla_{\vec p}\varepsilon_{\vec p}$

Boltzmann-Gleichung $\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} + e\vec E\,\nabla_{\vec p} + \frac{\vec p}{m}\nabla_{\vec r}\right) f(\vec r,\vec p,t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}}$

Beispiel: Störstellenstreuung (s-Wellen $\sigma(\vec p,\vec p')=const$)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{imp} = -\frac{1}{\tau_{imp}}\left[f(\vec r,\vec p,t) - \langle f(\vec r,\vec p,t)\rangle\right] \; ; \; \langle\dots\rangle = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega_{\vec p}\dots$$

Relaxations-Approximation

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = -\frac{1}{\tau}\delta f \qquad \delta f = f - f^0$$

Vereinfacht das Problem, aber es bleibt zu prüfen ob Näherung ausreicht.
Erhaltungssätze müssen erfüllt bleiben.

Beispiel: • angelegtes el. Feld $f^0 = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_F}{k_BT}}+1}$; $\delta f = f - f^0$

• stationäre Lösung, räumlich konstant

$$\left(\cancel{\frac{\partial}{\partial t}} + e\vec E\nabla_{\vec p} + \cancel{\frac{\vec p}{m}\nabla_{\vec r}}\right)(f_0+\delta f) = -\frac{1}{\tau_{imp}}\delta f \; ;$$

(• für s-Wellenstreuung reduziert sich Stoßintegral auf Relaxationsansatz)

• Entwicklung $\delta f \ll f^0 \Rightarrow \delta f = -\tau_{imp} e\vec E \frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon}\nabla_{\vec p}\varepsilon$

$$= -\tau_{imp} e\vec E\,\vec v_p\cdot\frac{\partial f^0}{\partial\varepsilon}$$

$$-\frac{\partial f^0}{\partial\varepsilon} = \frac{1}{4k_BT\cosh^2\frac{\varepsilon}{2k_BT}} \overset{k_BT\ll\varepsilon_F}{\approx} \delta(\varepsilon-\varepsilon_F)$$

$$\int_0^\infty d\varepsilon\left(-\frac{\partial f^0}{\partial\varepsilon}\right) = 1$$

• **Stromdichte** $\vec j = \frac{e}{V}\sum_{\vec p\sigma}\vec v_p\cdot\delta f = -\tau_{imp}\frac{e^2}{V}2\sum_{\vec p}\vec v_p(\vec v_p\vec E)\frac{\partial f^0}{\partial\varepsilon}$

$$\frac{1}{4\pi}\int d\Omega_p\,\vec p(\vec p\vec E) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi \begin{pmatrix}p_x\\p_y\\p_z\end{pmatrix} p_z E = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\frac{Ep^2}{4\pi}\int\sin\theta\, d\theta\int d\varphi\cos^2\theta$$

(E in z-Richtung) $= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\frac{Ep^2}{2}\int_{-1}^{1}d\eta\,\eta^2 = \frac13\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}Ep^2$

$\cos\theta = \eta$

$$\Rightarrow \vec j = -\tau_{imp}\, e^2\, 2\int d^3p\,\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\,\vec v_p(\vec v_p\vec E)\frac{\partial f^0}{\partial\varepsilon}$$

$$= -\tau_{imp}\, e^2 2 \int d\varepsilon\, N(\varepsilon) \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_p\, \vec v_p (\vec v_p \vec E) \frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon}$$

$$= -\tau_{imp}\, e^2 2 \int d\varepsilon\, N(\varepsilon)\, \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) \cdot \frac{1}{3} v^2 \vec E$$

$$\Rightarrow \vec j = \frac{2 e^2 \tau_{imp}}{3} v_F^2 N(\varepsilon_F) \vec E = \sigma \cdot \vec E$$

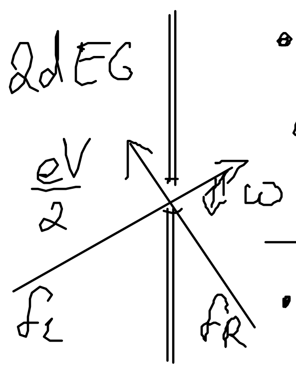
• **Leitfähigkeit** $\sigma = \frac{2 e^2 \tau_{imp}}{3} v_F^2 N(\varepsilon_F) = 2 e^2 N(\varepsilon_F) D$

Diffusionskonstante $D = \frac{v_F^2 \tau_{imp}}{3}$

$d = 3$: $N(\varepsilon_F) = \frac{m p_F}{2\pi^2 \hbar^3}$ $\quad n = \frac{4\pi}{3} p_F^3 \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}$

$\Rightarrow \sigma = \frac{n e^2 \tau_{imp}}{m}$ wie Drude

1.6 Sharvin-Leitwert eines Punktkontaktes



• in 2 (oder 3) Dimensionen

2d EG (2-dim Elektronengas)

• rechts und linkes „Reservoir" mit $V_{L/R} = \pm \frac{V}{2}$

$f_L = f^0(\varepsilon_p - \frac{eV}{2})$; $f_R = f^0(\varepsilon_p + \frac{eV}{2})$

2dim: $\vec I = w\, 2e \left(\sum_{\vec p,\, p_z > 0} \vec v_p f_L(\varepsilon) - \sum_{\vec p,\, p_z < 0} \vec v_p f_R(\varepsilon) \right)$

Spin; $p_z > 0$ von links; $p_z < 0$ von rechts

$\vec j = 2e \frac{1}{A} \sum_p$

$\vec I = w \vec j = \frac{2ew}{A} \sum_p$

$= 2ew \int \frac{d^2p}{(2\pi\hbar)^2} \cdots$

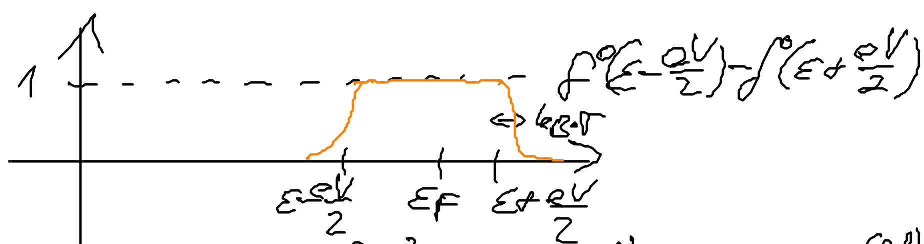
$$= 2e \cdot w \left(\int_{p_z > 0} \frac{d^2p}{(2\pi\hbar)^2} \vec v_p f_L - \int_{p_z < 0} \frac{d^2p}{(2\pi\hbar)^2} \vec v_p f_R \right)$$

$$= 2ew \int d\varepsilon\, N^{(2d)}(\varepsilon) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} v_p \frac{d\theta \cos\theta}{2\pi} \left[f^0(\varepsilon - \tfrac{eV}{2}) - f^0(\varepsilon + \tfrac{eV}{2}) \right]$$

$\leftarrow$ da $p_z < 0$ oder $p_z > 0$

mit $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos\theta = 2$; $I_z = \frac{2ew}{2\pi} 2 \int d\varepsilon\, v N^{(2d)}(\varepsilon) \left[f^0(\varepsilon - \frac{eV}{2}) - f^0(\varepsilon + \frac{eV}{2}) \right]$

$$= \frac{2ew}{\pi} v_F N^{(2d)}(\varepsilon)\, eV = G V$$



• **Leitwert** $G = \frac{2e^2 w}{\pi} v_F N^{(2d)}(\varepsilon_F)$, $N^{(2d)}(\varepsilon_F) = \frac{m}{2\pi\hbar^2}$; $h = 2\pi\hbar$

$$= \frac{2e^2}{\pi} w \frac{\hbar k_F}{2\pi \hbar^2} = \frac{w k_F}{\pi} \frac{2e^2}{h}$$

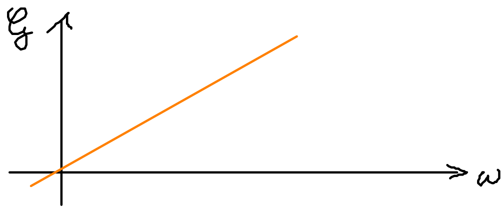
Widerstand R_K

Geometriefaktor

• Widerstandsquantum $R_K = \frac{h}{e^2} = 25{,}8\ldots\ k\Omega$

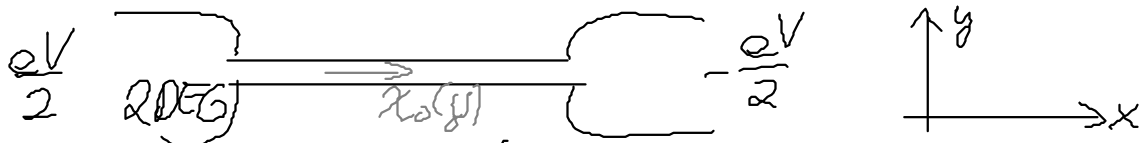
$$G = \frac{W\,2}{\lambda_F}\, 2\,\frac{1}{R_K}$$

• R_K bekannt vom Quanten-Hall-Effekt



3dim: $G^{(3d)} \propto A\, k_F^2 \cdot 2\,\frac{1}{R_K}$

1.7 Eindimensionaler Leiter zwischen Reservoirs



$$\psi(\vec r) = \varphi_0(z)\,\chi_0(y)\,e^{ikx}$$

$$I = 2e\left(\sum_{p>0} v_p f_L(\varepsilon_p) - \sum_{p<0} v_p f_R(\varepsilon_p)\right)$$

$$= 2e\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{2}\, N^{(1d)}(\varepsilon)\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\left[f^0\!\left(\varepsilon-\frac{eV}{2}\right) - f^0\!\left(\varepsilon+\frac{eV}{2}\right)\right]$$

$$N^{(1d)}(\varepsilon) = \frac{2}{2\pi\hbar}\,\frac{1}{\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}} = \frac{1}{\pi\hbar}\sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}$$

$$I = \frac{e}{\pi\hbar}\int d\varepsilon\, \frac{1}{\cancel{\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}}}\,\cancel{\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}}\left[f^0\!\left(\varepsilon-\frac{eV}{2}\right) - f^0\!\left(\varepsilon+\frac{eV}{2}\right)\right] = \frac{2e^2}{2\pi\hbar}V = \frac{2e^2}{h}V = 2\,\frac{e^2}{h} = \frac{2V}{R_K}$$

Zustandsdichte · Gruppengeschw.

$\Rightarrow$ Leitwert $G = \frac{2}{R_K}$ ist quantisiert