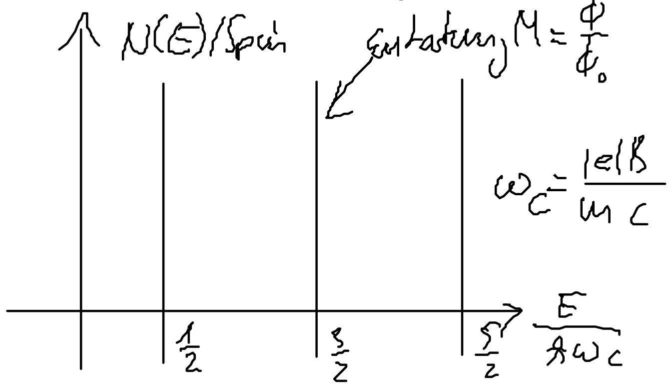
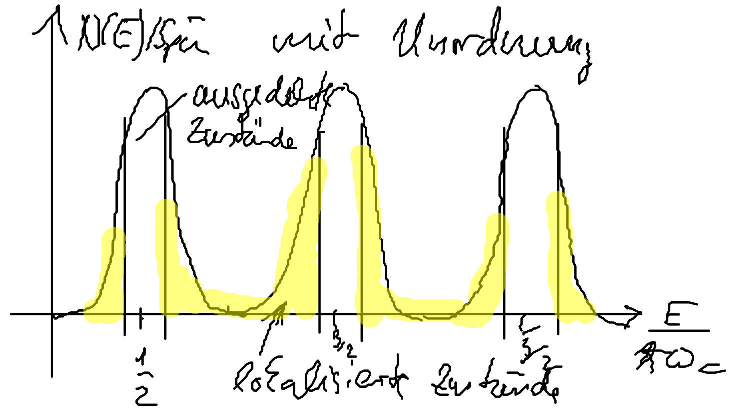
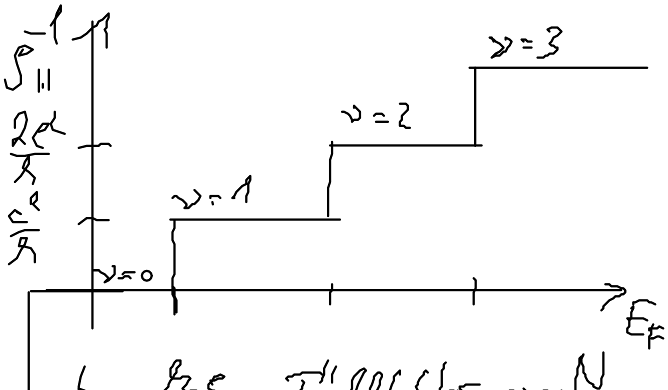
Quanten-Hall-Effekt







Lokalisierungslänge

$$\xi \sim |E-E_n|^{-s} \qquad s = 1\dots 2$$

$$\frac{h}{e^2} = 25{,}8\dots\ k\Omega$$

$$\Phi_0 = \frac{hc}{e} \qquad \text{Füllfaktor } \nu = \frac{N}{M}$$

- In Einfach: E_F einstellbar
- zunächst: halte E_F fest, ändere B

$\Rightarrow$ Teilchenzahl ändert sich in Stufen (unrealistisch)

- bisher waren Störstellen unbeachtet

$\Rightarrow$ Unordnung, Wellenfkt wird lokalisiert

hängt von ihr ab.

- **Berücksichtigung der Breite der Zustandsdichte:**
- halte E_F fest, ändere B $\Rightarrow$ Teilchenzahl N ändert sich nicht

(oder B fest, E_F variabel) in Sprüngen

- Wenn E_F im Bereich der lokalisierten Zustände liegt.

$\Rightarrow$ $\sigma_{xx} = 0$ (Transport leitfähigkeit)

für $\sigma_{xy} \neq 0 \Rightarrow \rho_{xx} = 0$

- Wenn E_F im Bereich der ausgedehnten Zustände liegt

$\Rightarrow$ $\sigma_{xx} \neq 0$, $\rho_{xx} \neq 0$

- **Behauptung:** E_F im Bereich der lokalisierten Zustände

$\Rightarrow \sigma_{xy} = i\,\frac{e^2}{h} \qquad i = 1, 2, \ldots \qquad$ (pro Spin)

Elektronen in den ausgedehnten Zuständen liefern noch denselben Wert für σ_{xy} wie volle Landau-Niveaus (Quantisierung?)

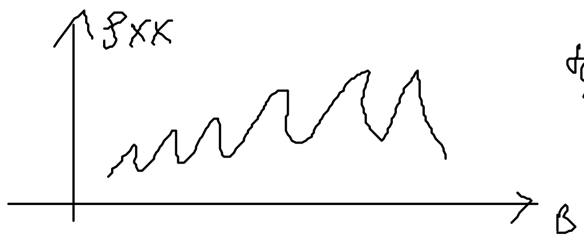
4.3.3 Shubnikov-DeHaas Oszillationen

- Streurate durch Störstellen mit Konzentration c und Potential U

$\Rightarrow \frac{1}{\tau} = \frac{\pi}{\hbar} N(E_F)\, c \cdot U^2$, $N(E_F)$ hängt von B ab

$\Rightarrow \rho_{xx} = \frac{m}{ne^2 \tau} \propto N(E_F)$ oszilliert als Fkt von B

war bekannt vor v. Klitzing

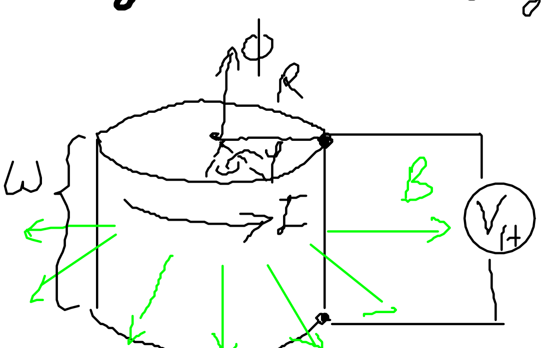


typisches Experiment

4.3.4 Topologisches Argument für die Quantisierung von σ_{xy}

von R.B. Laughlin (Nobelpreis für Theorie des FQHE)

- **Biege Probe zu Ring**



- Strom I fließt um den Ring
- Hall-Spannung zwischen oben und unten
- Strom I erzeugt zusätzliches Magnetfeld $\vec{B}$ Vektorpotential $\vec{A}$ und Fluss ϕ

$\boxed{x = L_x \frac{\varphi}{2\pi}}$ $\boxed{L_x = 2\pi R}$

- **QM von "persistent current"**

Zustand auf dem Ring $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$

vergleiche mit Aharonov-Bohm-Effekt

$$\left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{c}\frac{d}{dx} - \frac{q}{c}\vec{A}(x)\right)^2 + V(x)\right)\psi_\phi(x) = E_\phi\, \psi_\phi(x)$$

$$\psi_a(x) = \psi_0(x)\, \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{q}{c}\int^x dx'\, \vec{A}(x')\right]$$

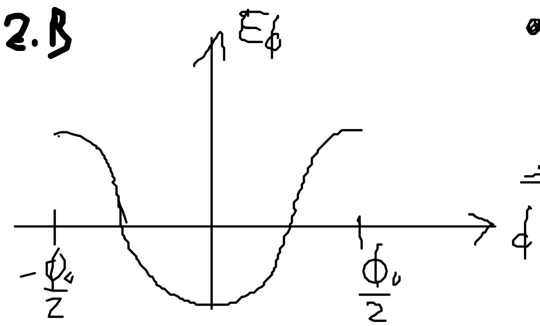
für geschlossenen Weg Phasenfaktor : $\qquad q = |e|$

$$\frac{q}{\hbar c}\oint dx'\,\vec a(x') = \frac{q}{\hbar c}\oint d\vec f\,\underbrace{\mathrm{rot}\,\vec a}_{\vec B} = \frac{q}{\hbar c}\,bF = 2\pi\frac{|e|}{\hbar c}\phi = 2\pi\frac{\phi}{\phi_0}$$

Für Änderung von ϕ um Einheiten von ϕ_0 ist Phasenfaktor $=1$

$\Rightarrow E_\phi$ ist eine periodische Funktion von ϕ mit Periode ϕ_0

z.B



- Aber für $\Delta\phi \neq \phi_0$ kann Phasenfaktor als Randbedingung angesehen werden

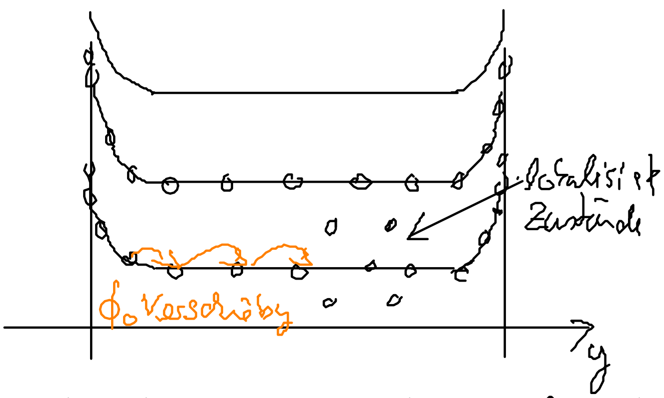
$\Rightarrow$ Dasselbe Szenarium wie bei Blochzuständen und Bandstruktur

- **Weiterhin gilt:**

Für den gen Zustand gibt es Strom: $j \propto i\left(\psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}A\right)\psi - c.c.\right)$

$\Rightarrow \boxed{j = c\,\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}}$

- Viele Zustände besetzt $\Rightarrow I = c\,\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}$, E_ϕ ist Gesamtenergie



- Punkte bezeichnen Position des Zustands
- Wenn die Randbedingung in x-Richtung durch ϕ verändert wird

$\Rightarrow y_k$ verschiebt sich

- Aufdrehen von ϕ verschiebt alle ausgedehnten Zustände

Wenn $\delta\phi = \phi_0 \Rightarrow$ jeder Zustand ist genau um 1 Platz verschoben

$\Rightarrow$ pro gefülltem Landau-Band wird ein Elektron in y-Richtung durch die Probe geschoben, gegen die Hall-Spannung

$\Rightarrow$ Arbeit $\delta E = i\,|e|\,V_H \qquad \delta\phi = \phi_0$

$$\Rightarrow \sigma_{xy} = \frac{I}{V_H} = \frac{1}{V_H}\,c\,\frac{\delta E}{\delta\phi} = \frac{1}{V_H}\,c\,\frac{i\,|e|\,V_H}{\phi_0} = i\,\frac{c|e|}{\hbar\frac{c}{|e|}} = i\,\frac{e^2}{\hbar}$$

4.4 Fraktioneller Quanten-Hall-Effekt

Integer-QHE $\Rightarrow$ Plateaus bei Füllfaktor $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

Experimente an sehr reinen Proben zeigen weitere Plateaus bei ν

1) $\nu = \nu_p = \frac{p}{2p+1}$ und $\nu = 1-\nu_p,\ 1+\nu_p,\ 2-\nu_p, \dots$ mit $p = 0, 1, 2, \dots$

$\Rightarrow \nu = 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9},\ \dots\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{9}$

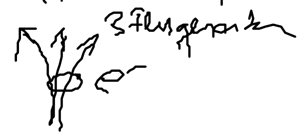
2) $\nu = \bar{\nu}_p = \frac{p}{4p\pm 1}$ und $1-\bar{\nu}_p,\ 1+\bar{\nu}_p,\ 2-\nu_p \dots$

$\Rightarrow \nu = \frac{1}{5},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{9},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{13},\ \frac{3}{11}$

- Theorie erfordert Berücksichtigung von WW

effektive Teilchen bestehen aus p Elektronen und q Flussquanten

zB $\nu = \frac{1}{3} = \frac{N}{\frac{\Phi}{\Phi_0}}$ 3 Flussquanten pro Elektron



für $\nu = \frac{p}{q}$