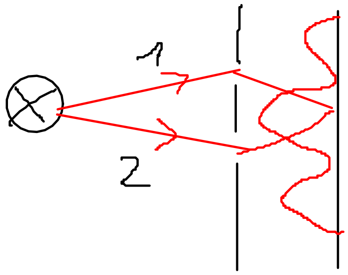
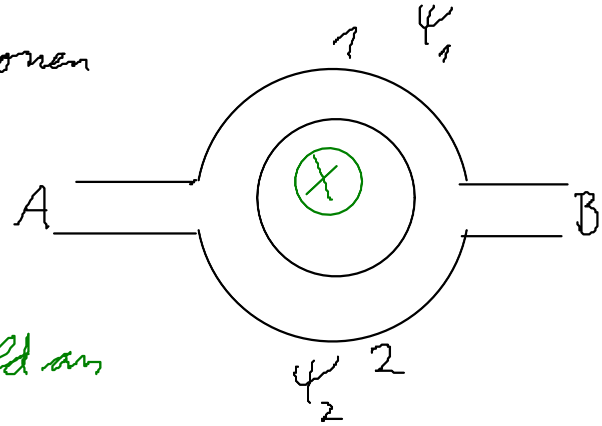
5 Quanteninterferenzeffekte

5.1 Der Aharonov - Bohm - Effekt

ähnlich Youngsche Doppelspalt (Optik)



für Elektronen



lege $\vec{B}$-Feld an

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + V(\vec{r})$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla - \frac{i}{\hbar}\frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + V(\vec{r})$$

$$H\,\psi_0(\vec{r}) = E\,\psi_0(\vec{r}) \qquad \vec{B} = 0$$

$$H\,\psi_B(\vec{r}) = E\,\psi_B(\vec{r})$$

$$\psi_B = \psi_0 \exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{q}{c}\int_{\vec{r}_0} \vec{A}(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,'\right)$$

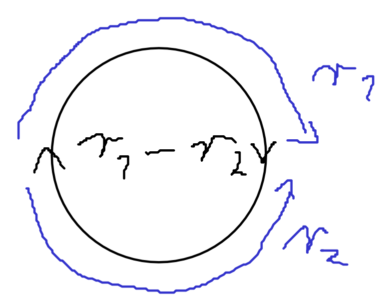
$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = |\psi_1|\,e^{i\theta_1} + |\psi_2|\,e^{i\theta_2}$$

Leitwert $\propto$

$$|\psi|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_1||\psi_2|\cdot 2\cdot\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\theta_1 \longrightarrow \theta_1^{(0)} + \frac{i}{\hbar}\frac{q}{c}\int_{r_1} dr'\,A(\vec{r}\,')$$

$$\theta_2 \longrightarrow \theta_2^{(0)} + \quad '' \quad \int_{r_2} \quad ''$$



$$-\int_{r_2} = +\int_{r_2}$$ Laufrichtung umkehren

Differenz:

$$\theta_1 - \theta_2 = \theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)} + \frac{i}{\hbar}\frac{q}{c}\oint dr'\, A(\vec{r}\,')$$

$$= \theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)} + \frac{1}{\hbar}\frac{q}{c}\,\phi$$ eingeschlossener Fluss

$$= \theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)} + 2\pi\,\frac{\phi}{\phi_0}$$ $\phi_0 = \frac{\hbar c}{e}$ Flussquant

Erhöhen von B verändert $\Delta\theta$, ein Fluss von ϕ_0 verändert die Phase um 2π.

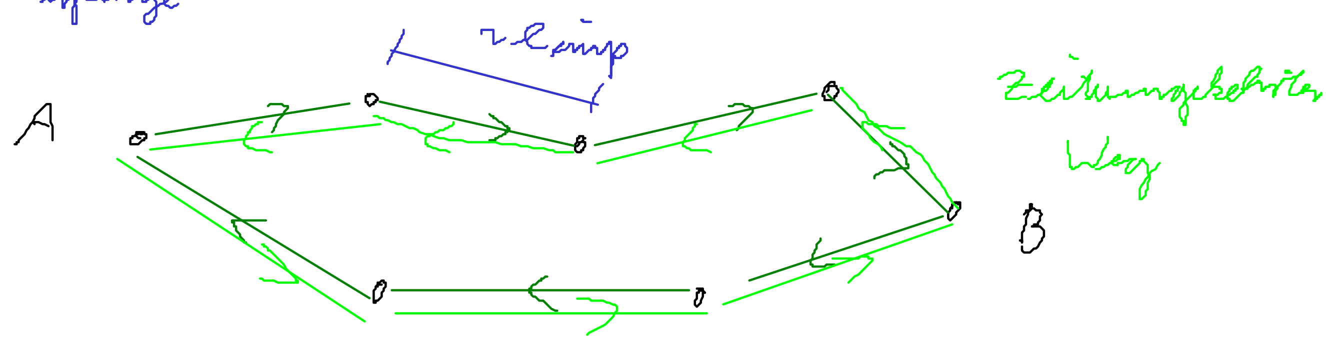
konstruktive und destruktive Interferenz
→ hell / dunkel in Optik
hoher / geringer Strom

iA. mehrere Kanäle N, addieren sich zufällig auf
⇒ Effekt wächst nur mit $\sqrt{N}$
für viele Kanäle Effekt klein

5.2 schwache Lokalisierung

$l_{imp} < L < L_\phi$

freie Weglänge — Probengröße — Phasenkohärenz



$\sigma \sim T_{AB} \sim 1 - R_{AB}$

linear Response

$\sigma = 2e^2 N(E_F)\, D$ Diffusionskonstante

$$D = \frac{1}{3}\int_0^\infty dt \, \langle \vec{v}(t)\,\vec{v}(0)\rangle = \frac{v_F^2\,\tau_{imp}}{3}$$

$$\langle \vec{v}(t)\,\vec{v}(0)\rangle = v_F\, e^{-\frac{t}{\tau_{imp}}}$$

$$N(E_F) = \frac{p_F^2}{2\pi^2 \hbar^3 v_F}$$

$$\sigma \sim |\Psi(B)|^2 = \Big|\underbrace{\sum_\alpha}_{\text{alle Wege } \alpha} \Psi_\alpha(B)\Big|^2 \underbrace{=}_{\text{klassisch, keine Phasenkohärenz}} \sum_\alpha |\Psi_\alpha(B)|^2$$

Reflexionswahrscheinlichkeit

$$|\Psi(A)|^2 = \Big|\sum_\alpha \Psi_\alpha(A)\Big|^2$$

$$= \sum_\alpha |\Psi_\alpha(A)|^2 + \sum_\alpha \underbrace{\Psi^*_{\bar\alpha}}_{\text{zeitumgekehrter Weg}}(A)\,\Psi_\alpha(A) + \underbrace{\ldots}_{\substack{0 \\ \text{wegen Mittelung}}}$$

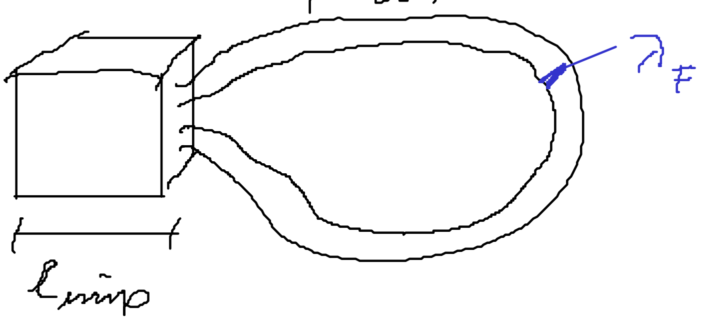
$$= 2\cdot\sum_\alpha |\Psi_\alpha(A)|^2 = 2\cdot \text{klassisch}$$

$\Rightarrow$ Rückstreuwahrscheinlichkeit erhöht, maximal verdoppelt

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$W(\vec r_f, \vec r_i, t_f, t_i)$

Wahrscheinlichkeit, dass e^- bei $(r_i, t_i) \longrightarrow (r_f, t_f)$ zu finden ist



$t > \tau_{imp}$

(diffusives Limes)

Betrachte Rückstreuwahrscheinlichkeit

$$W_t(0,0,t,0)$$

Korrektur Diffusionskonst. für Rückstreuwahrscheinlichkeit

$$\Delta D = -\frac{1}{3}\int_{\tau_{imp}}^{\infty} dt \; v_F^2 \left(\frac{\lambda_F}{l_{imp}}\right)^2 l_{imp}^3 \; \tilde{W}_t \, \frac{1}{2\pi}$$

$$\Delta \sigma = -\frac{2e^2}{\pi \hbar} D \int_0^{\infty} dt \; \tilde{W}_t$$

schwache Lokalisierung (ohne Feld)

↳ schlechterer Leitwert

W_t erfüllt Diffusionsgl.

$\tilde{W}_t$ " " + Zerstörung der Phasenkohärenz

$$\left(\partial_t - D\nabla^2 + \frac{1}{\tau_\varphi}\right) W_t(\vec{r},0,t,0) = \delta(t)\,\delta(\vec{r})$$

Relaxation   Phasenzerstörung

Phase wird durch Freiheitsgrade des Festkörpers zerstört (z.B. Phononen)

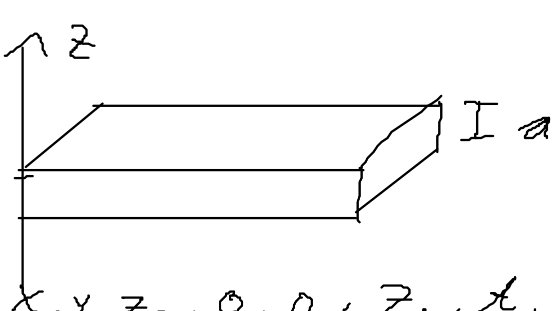
Lösung der Diffusionsgl.

3D

$$\tilde{W}(r,0,t,0) = \frac{1}{(4\pi D t)^{3/2}} \, e^{-\frac{\vec{r}^2}{4Dt} - \frac{t}{\tau_\varphi}}$$

Dichte (Wahrscheinlichkeitsdichte)

2D



$$\tilde{W}(x,y,z_f,0,0,z_i,t,0) =$$

$$\frac{1}{4\pi D t a} \, e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt} - \frac{t}{\tau_{imp}}} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi m z_f}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi m z_i}{a}\right) e^{-\frac{\pi^2 m^2 D t}{a^2}}$$

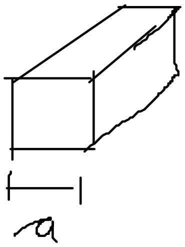
klein

$$a \ll \sqrt{Dt}$$

$\Rightarrow$ nur $m = 0$

$$\tilde{W}(\vec{r}, 0, t, 0) = \frac{1}{4\pi D t a} e^{-\frac{r^2}{4Dt} - \frac{t}{\tau_\varphi}}$$

1D



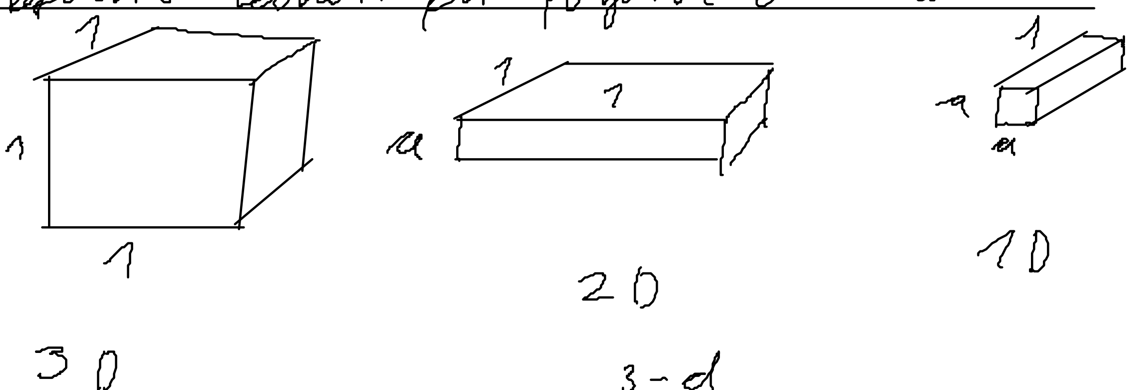
$$\tilde{W}(x, 0, t, 0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}\, a^2} e^{-\frac{x^2}{Dt} - \frac{t}{\tau_\varphi}}$$

Rückkehrwahrscheinlichkeit

$$\tilde{W}_t = \tilde{W}(0, 0, t, 0) = \frac{a^{d-3}}{(4\pi D t)^{d/2}} e^{-\frac{t}{\tau_\varphi}}$$

(d = # Dimension)

<u>Definiere Leitwert für folgende Elemente</u>



$$g = a^{3-d} \sigma$$

für $a \ll L_\varphi = \sqrt{D \tau_\varphi}$

$$\Delta g = a^{3-d} \Delta \sigma = -\frac{e^2}{h} \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{l_{mip}} - \frac{1}{\sqrt{D\tau_\varphi}} & d = 3 \\ \ln(\tau_\varphi / \tau_{mip}) & d = 2 \\ 2\pi \sqrt{D \tau_\varphi} & d = 1 \end{cases}$$

Und was bringt das?

Ist das richtig?

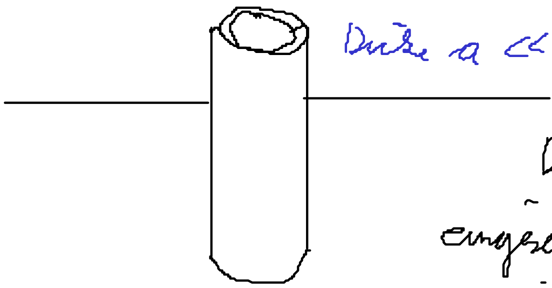
Exp.-daten:

$\tau_\varphi(T)$ ist abhängig von der Zahl der Phononen

$\Rightarrow$ Temperaturabhängig $\Rightarrow$ Δg messbar

ähnlich für Spinabhängigkeit von τ_φ

Sharvin-Sharvin



Dicke $a \ll l_{imp}$

Diffusion in 2D-Film, eingeschlossener Fluß hängt von der Windungszahl n ab

$$\tilde{W}_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi D t a} \exp\left(-\frac{nL^2}{4Dt} + 2\pi i n \frac{\phi}{\phi_0} - \frac{t}{\tau_\varphi}\right)$$

$$= \tilde{W}_t^{(0)} + 2\cos\left(2\pi \frac{\phi}{\phi_0}\right) \frac{1}{4\pi D t a} \exp\left(-\frac{L^2}{4\pi D t} - \frac{t}{\tau_\varphi}\right)$$

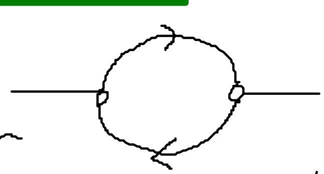
$$\Rightarrow \Delta g = \Delta g(B=0) - \frac{2e^2}{\pi \hbar} \cos\left(\frac{2\pi\phi}{\phi_0}\right) \int_{\tau_{imp}}^{\infty} dt \, \frac{\exp\left(-\frac{L^2}{4\pi D t} - \frac{t}{\tau_\varphi}\right)}{t}$$

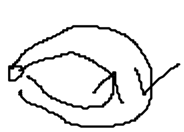
$$= \Delta g(B=0) - \frac{4e^2}{\pi\hbar} \cos\left(2\pi \frac{\phi}{\phi_0}\right) \underbrace{K_0\left(\frac{L}{L_\varphi}\right)}_{\text{mod. Besselfkt.}}$$

Leitfähigkeit oszilliert mit Periode ϕ_0

ABER $\boxed{\phi_0 = \frac{hc}{2e}}$

Zusammenfassung:

Aharonov-Bohm  $\frac{\phi}{hc/e}$

Sharvin-Sh.  $\frac{\phi}{hc/2e}$