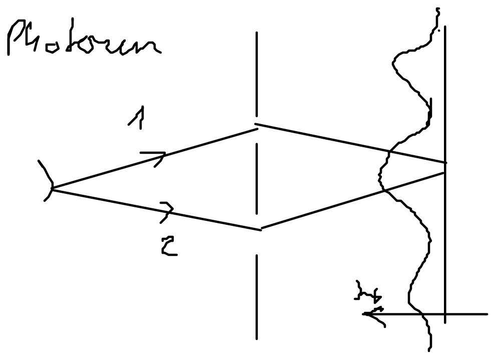
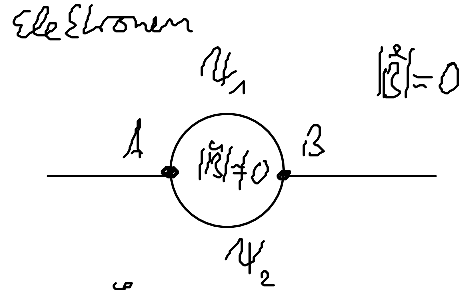
V Quanteninterferenzeffekte

5.1 Der Aharonov-Bohm-Effekt

- ähnlich wie in der Optik : Youngscher Doppelspalt





lege $\vec{B}$-Feld an

Elektronen

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + V(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla - \frac{i}{\hbar}\frac{q}{c}\vec{A}\right) + V(\vec{r})$$

$$H\,\Psi_0(\vec{r}) = E\,\Psi_0(\vec{r})$$

$$H\,\Psi_{\vec{B}}(\vec{r}) = E\,\Psi_{\vec{B}}(\vec{r}) \quad \text{mit } \Psi_{\vec{B}}(\vec{r}) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{q}{c}\int^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,'\right]\Psi_0(\vec{r})$$

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi_1(\vec{r}) + \Psi_2(\vec{r}) = |\Psi_1|\,e^{i\Theta_1} + |\Psi_2|\,e^{i\Theta_2}$$

$$|\Psi(\vec{r})|^2 = |\Psi_1(\vec{r})|^2 + |\Psi_2(\vec{r})|^2 + |\Psi_1||\Psi_2|\,2\cos(\Theta_1-\Theta_2)$$

$$\left.\begin{aligned}\Theta_1 &\longrightarrow \Theta_1^{(0)} + \frac{i}{\hbar}\frac{q}{c}\int_1 d\vec{r}\,'\vec{A}(\vec{r}\,')\\ \Theta_2 &\longrightarrow \Theta_2^{(0)} + \frac{i}{\hbar}\frac{q}{c}\int_2 d\vec{r}\,'\vec{A}(\vec{r}\,')\end{aligned}\right\}\ \Theta_1-\Theta_2 = \Theta_1^0-\Theta_2^0 + \frac{1}{\hbar}\frac{q}{c}\underbrace{\oint d\vec{r}\,'\vec{A}(\vec{r}\,')}_{=\oint d\vec{f}\,\vec{B} = \phi}$$

$$= \Theta_1^0 - \Theta_2^0 + \frac{1}{\hbar}\frac{q}{c}\phi$$

$$= \Theta_1^0 - \Theta_2^0 + 2\pi\frac{\phi}{\phi_0}$$

$$\boxed{\phi_0 = \frac{hc}{e}}$$

- Erhöhen von $|\vec{B}|$ verändert Θ
- Fluss von ϕ_0 ändert die Phase um 2π

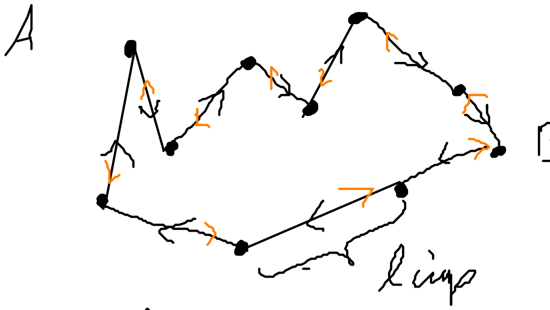
$\Rightarrow$ konstruktive und destruktive Interferenz

hell	dunkel	auf Schirm
hoher	niedriger	Strom

- im Allgemeinen mehrere Kanäle, addieren sich stochastisch auf
  Effekt wächst nur mit $\sqrt{N}$ und wird klein für hohe N

5.2 schwache Lokalisierung

Viele Streuer $\quad l_{imp} < L < L_\phi$



Zeitumgekehrter Weg

$\sigma \sim T_{AB}$

$\sigma \sim 1 - R_A$

$\sigma \sim |\psi(B)|^2$

$$\sigma = 2e^2 N(E_F) D$$

$$D = \frac{1}{3}\int_0^\infty dt \, \langle \vec{v}(t)\, \vec{v}(0)\rangle = v_F^2 \, \tau_{imp} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\langle \vec{v}(t)\vec{v}(0)\rangle = v_F^2 \, e^{-\frac{t}{\tau_{imp}}}$$

$$N(E_F) = \frac{p_F^2}{2\pi^2 \hbar^3 v_F}$$

$$|\psi(B)|^2 = \Big|\sum_\alpha \psi_\alpha(B)\Big|^2 \underset{\text{klassisch}}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_\alpha |\psi_\alpha(B)|^2$$

klassisch: keine Phasenkohärenz

- Reflexionswahrscheinlichkeit

$$|\psi(A)|^2 = \Big|\sum_\alpha \psi_\alpha(A)\Big|^2 = \sum_\alpha |\psi_\alpha(A)|^2 + \sum_\alpha \psi_\alpha^*(A)\,\psi_{\bar\alpha}(A) + \overbrace{\dots}^{=0}$$

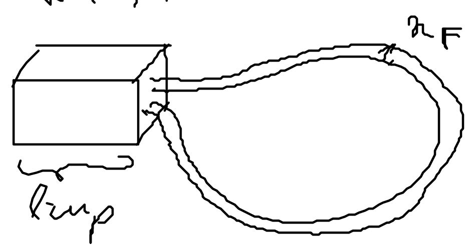
$$= 2\sum_\alpha |\psi_\alpha(A)|^2 \hat{=} 2 \cdot \text{klassisch}$$

$\Rightarrow$ Reflexionswahrscheinlichkeit ist verstärkt, maximal verdoppelt

Transmissionsw. ist reduziert

Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte

$W(\vec{r}_f, \vec{r}_i, t_f, t_i)$



$t \gg \tau_{imp}$ (diffusiver Limes)

- Betrachte Rückstreuwahrscheinlichkeit $W_t(0,0,t,0)$

$$\Delta D = -\frac{1}{3}\int_{\tau_{imp}}^\infty dt \; v_F^2 \left(\frac{\lambda_F}{l_{imp}}\right)^2 l_{imp}\, \tilde{W}_t \, \frac{1}{2\pi}$$

$$\Delta\sigma = -\frac{2e^2}{\pi\hbar} D \cdot \int_{\tau_{imp}}^\infty dt \; \tilde{W}_t \qquad \text{schwache Lokalisierung (ohne Feld)}$$

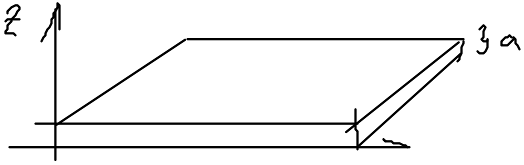
- W_t erfüllt Diffusionsgleichung
- $\tilde{W}_t$ erfüllt Diffgl. und Zerstörung der Phasenkohärenz

$$\left(\frac{d}{dt} - D\nabla^2 + \frac{1}{\tau_\varphi}\right)\tilde{W}_t(\vec{r}, 0, t, 0) = \delta(t)\,\delta(\vec{r})$$

Lösung Diffusionsgleichung

- **3 dim:** $\quad \tilde{W}(\vec{r}, 0, t, 0) = \dfrac{1}{(4\pi D t)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{r^2}{4Dt} - \frac{t}{\tau_\varphi}}$

• 2dim:

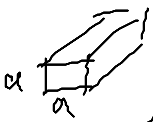


$$\tilde{\omega}(x,y,z_f;0,0,z_i;t,0) = \frac{1}{4\pi D t a}\cdot e^{-\frac{(x^2+y^2)}{4Dt}-\frac{t}{\tau_\varphi}} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi m}{a} z_f\right)\cos\left(\frac{\pi m}{a} z_i\right) e^{-\frac{\pi^2 m^2 D t}{a^2}}$$

$a \ll \sqrt{Dt}$ $\Rightarrow$ nur $m=0$

$$\tilde{\omega}(\vec{r},0,t,0) = \frac{1}{4\pi D t a} e^{-\frac{r^2}{4Dt}-\frac{t}{\tau_\varphi}}$$

• 1dim:

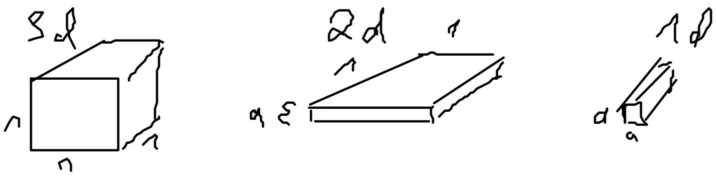


$$\tilde{\omega}(x,0,t,0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}\, a^2} e^{-\frac{x^2}{4Dt}-\frac{t}{\tau_\varphi}}$$

Rückkehrwahrscheinlichkeit

$$\tilde{\omega}_t = \tilde{\omega}(0,0,t,0) = \frac{a^{d-3}}{(4\pi D t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{t}{\tau_\varphi}}$$

• definiere Leitwert der folgenden Elemente



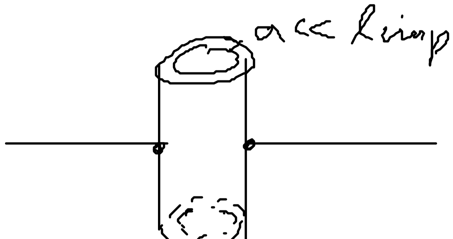
$$g = a^{3-d}\cdot\sigma$$

• für $a \ll L_\varphi = \sqrt{D\tau_\varphi}$

$$\Delta g = a^{3-d}\Delta\sigma = -\frac{e^2}{\hbar}\cdot\begin{cases}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{1}{l_{imp}} - \frac{1}{\sqrt{D\tau_\varphi}} & d=3\\ \ln\left(\frac{\tau_\varphi}{\tau_{imp}}\right) & d=2\\ 2\pi\sqrt{D\tau_\varphi} & d=1\end{cases}$$

• $\tau_\varphi(T)$ ist temperaturabhängig $\Rightarrow \Delta g$ messbar

Sharvin-Sharvin



Diffusion in 2d-Film, eingeschlossener Fluss hängt von der Windungszahl n ab.

$$\tilde{\omega}_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi D t a}\exp\left[-\frac{nL^2}{4Dt} + 2\pi i n\frac{\Phi}{\Phi_0} - \frac{t}{\tau_\varphi}\right]$$

$$= \tilde{\omega}_t^{(0)} + 2\cos\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)\frac{1}{4\pi D t a}\exp\left[-\frac{nL^2}{4\pi Dt} - \frac{t}{\tau_\varphi}\right]$$

$$\Rightarrow \Delta g = \Delta g(B=0) - \frac{2e^2}{\pi\hbar}\cos\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right)\underbrace{\int_{\tau_{imp}} dt\,\frac{1}{t}\exp\left[-\frac{nL^2}{4\pi Dt} - \frac{t}{\tau_\varphi}\right]}_{=K_0\left(\frac{L}{\tau_\varphi}\right)}$$

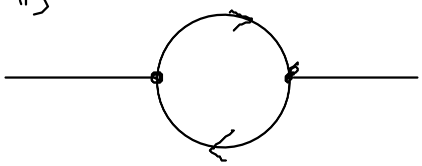
$\leftarrow$ modifizierte Besselfkt

• Leitfähigkeit oszilliert mit Periode ϕ_0

Aber $\boxed{\phi_0 = \frac{hc}{2e}}$

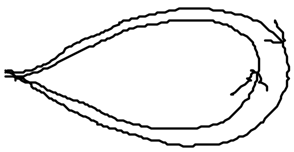
Vergleich

A.B



$\phi = \frac{hc}{e}$

Sharvin



$\phi = \frac{hc}{2e}$