

P3 Kernphysik

25. Mai 2009

β -Spektroskopie

Gruppe 58 - Saskia Meißner, Arnold Seiler

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel des Versuchs	2
2 Theoretische Grundlagen	2
2.1 β -Zerfall	2
2.1.1 β^- -Zerfall	2
2.1.2 β^+ -Zerfall	2
2.1.3 Elektronen-Einfang	3
2.1.4 Zerfallsreihe ^{137}Cs	3
2.2 Neutrinomasse	4
2.3 Innere Konversion	4
3 Experimenteller Aufbau	4
3.1 Magnetisches Spektrometer	4
3.1.1 $\pi \cdot \sqrt{2}$ -Spektrometer	5
3.2 Geiger-Müller-Zählrohr	5
4 Durchführung	6
4.1 Aufnahmen der Untergrundzählrate	6
4.2 Aufnahmen des β -Spektrums von ^{137}Cs	6
4.2.1 Eichung	6
5 Auswertung	7
5.1 Eichung und Spektrum von ^{137}Cs	7
5.2 Übergangsenergie von $^{137}\text{Cs} \rightarrow ^{137m}\text{Ba}$	9
5.3 Analyse des Konversionsspektrums von $^{137m}\text{Ba} \rightarrow ^{137}\text{Ba}$	9
5.3.1 Konversionskoeffizienten und Konversionsverhältnisse	9
5.3.2 Multipolordnung der Strahlung	10
6 Anhang	10
6.1 Rechnung	10
6.2 Tabellen	10
6.2.1 Zählrate, Untergrund	10
6.2.2 Fermifunktion	10

6.2.3	red.Rate (Impulsskala, Eichung)	11
6.2.4	Kurie-Plot	11
6.2.5	β^- -Spektrum	11
6.3	Fehlerrechnung	11

1 Ziel des Versuchs

Mit Hilfe eines elektromagnetischen Spektrometers werden wir das β -Spektrum von ^{137}Cs bestimmen. Durch einen Kurie-Plot der Messung erhalten wir die Übergangsenergie der β -Zerfälle. Zur Bestimmung der Konversionskoeffizienten und der Multipolordnungen der β -Strahlung von ^{137}Ba messen wir die Spektren der Konversionselektronen.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 β -Zerfall

Das β -Spektrum ist kontinuierlich da die Energie auf das Elektron (bzw. Positron) und ein Neutrino verteilt werden. Die verschiedenen Zerfälle können mit der Crossing-Symmetrie ineinander überführt werden.

Die Energie des Elektrons (bzw. Positron) und des Neutrinos kommt aus der Bindungsenergie, um die der Kern nach dem Zerfall stabiler geworden ist. Diese Bindungsenergie ist diskret.

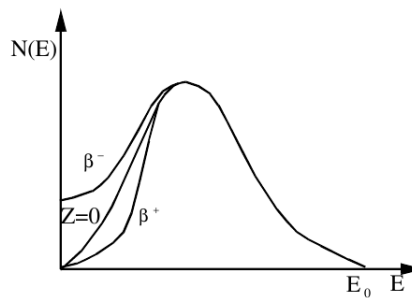
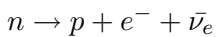


Abbildung 1:

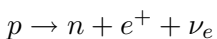
Form des β -Spektrums (Quelle: blaues Buch)

2.1.1 β^- -Zerfall



Durch die schwache Wechselwirkung zerfällt ein Neutron in ein Proton, Elektron und anti-Elektronneutrino. Die frei werdende Energie ist $\Delta E = E_{\text{Neutron}} - E_{\text{Proton}} - E_{\text{Elektron}} + \Delta E_{\text{Bindung}} \approx 0,8\text{MeV} + \Delta E_{\text{Bindung}}$ - also etwas größer als die Differenz der Bindungsenergien vor und nach dem Zerfall.

2.1.2 β^+ -Zerfall



Hier zerfällt ein Proton in ein Neutron, Positron und Elektronneutrino. Dieser Prozess ist nur in einem Kern möglich, da das Neutron eine höhere Ruheenergie hat als das Proton. Um die Differenz zwischen Proton und Neutron und die Energie für das Positron aufzubringen, stehen ca. $1,8\text{MeV}$ weniger als die frei werdende Bindungsenergie zur Verfügung: $\Delta E = E_{\text{Proton}} - E_{\text{Neutron}} - E_{\text{Elektron}} + \Delta E_{\text{Bindung}} = -1,8\text{MeV} + \Delta E_{\text{Bindung}}$.

2.1.3 Elektronen-Einfang

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e$$

Elektronen -Einfang findet statt, wenn die Energie zum β^+ -Zerfall ausreicht aber nicht zur Emission eines β^+ .¹ Stattdessen wird ein Elektron des Atoms „eingefangen“. Der Kern gibt die frei werdende Bindungsenergie dann als hochenergetische Photonen (γ -Strahlung) ab, die Elektronen im Atom füllen den frei gewordenen Platz nahe dem Kern auf, wodurch ebenfalls Photonen abgestrahlt werden.

2.1.4 Zerfallsreihe ^{137}Cs

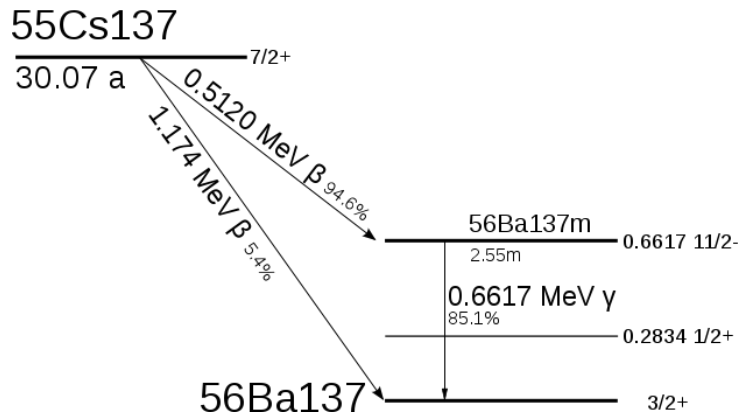


Abbildung 2:
 ^{137}Cs -Zerfallsreihe

Caesium 137 zerfällt durch abstrahlen eines Elektrons (und eines Elektron-Antineutrino) in Barium 137. Nur in 5% der Zerfälle geht die gesamte Energie von 1,17MeV auf Elektron und Neutrino über, beim Großteil der Zerfälle haben Elektron und Neutrino zusammen nur eine Energie von 512keV. Die restlichen 662keV bleiben zunächst im Bariumkern. Dieser angeregte Bariumkern gibt diese Energie dann nach recht kurzer Zeit als Photon ab. Die Photonen direkt werden in diesem Versuch nicht nachgewiesen - jedoch kann der Kern die Energie auch auf ein kernnahes Elektron übertragen, das dann als β^- -Strahlung das Atom verlässt. Diese Elektronen haben nun eine diskrete Energie von 662keV, da kein Neutrino entsteht, das ebenfalls Energie trägt. Mit dieser diskreten Energie werden wir später die Energieskala eichen.

Kurie-Plot Der Kurie-Plot ist eine geeignete Auftragung um bestimmte Eigenschaften des β -Spektrums besser ablesen zu können. Die Geradengleichung lautet: $\sqrt{\frac{N(p)}{p^2 \cdot F(E,Z)}} = \text{const} \cdot (E_0 - E_{e^-}) |H_{fi}|$ mit

- $F(E, Z)$ Fermifunktion
- $|H_{fi}|$ Übergangsmatrixelement
- $w_{fi} = \frac{dn}{dE_0} \cdot \frac{|H_{fi}|^2}{\hbar}$ Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit in ein Energieintervall des Endzustandes
- $\frac{dn}{dE_0}$ Dichte der Endzustände im Intervall dE_0
- $w_{fi} = N(p) \cdot dp$ wenn $dE_0 \hat{=} [p, p + dp]$

¹Genau genommen findet Elektroneneinfang auch dann statt, wenn β^+ -Zerfall stattfindet. Allerdings gewinnt er erst dann Bedeutung, wenn die Energie nicht ausreicht um ein Positron zu erzeugen: $\Delta E = E_{\text{Proton}} - E_{\text{Neutron}} + \Delta E_{\text{Bindung}} \approx -1,3\text{MeV} + \Delta E_{\text{Bindung}}$

- $n_e = \frac{4 \cdot \pi \cdot p^2 \cdot dp \cdot V}{h}$ Anzahl Elektronen im Phasenraum
- $E_0 = E_{e^-} + E_\nu$ man vernachlässigt die Rückstoßenergie des Tochterkerns
- $p_\nu = \frac{1}{c} \cdot (E_0 - E_{e^-})$ man setzt die Neutrino Ruhemasse gleich Null

Zur Auswertung werden wir die reduzierte Gleichung verwenden: $\sqrt{\frac{Z(\eta)}{\eta \cdot \epsilon_{e^-} \cdot G(\eta, Z)}} = const \cdot (\epsilon_0 - \epsilon_{e^-})$ mit

- $\epsilon_B = \frac{E_B + m_0 \cdot c^2}{m_0 \cdot c^2}$ und $\epsilon_{e^-} = \sqrt{\eta^2 + 1}$ reduzierte Energien
- $\eta = \frac{p}{m_0 \cdot c}$ reduzierter Impuls
- $G(\eta, Z) = \frac{\eta}{c} \cdot F(E, Z)$ reduzierte Fermifunktionen

Man trägt $\sqrt{\frac{Z(\eta)}{\eta \cdot \epsilon_{e^-} \cdot G(\eta, Z)}}$ über ϵ_{e^-} auf.

2.2 Neutrinomasse

Im Kurie-Plot setzt man die Neutrinomasse gleich Null. Das heißt man kann aus den gemessenen Werten die Masse der Neutrinos bestimmen. Der Unterschied zwischen der Schnittstelle mit der Energie-Achse des Plots und dem der gemessenen Werte entspricht der Ruheenergie der Neutrinos.

2.3 Innere Konversion

Wenn das Zerfallsprodukt eines Nuklids sich nicht im Grundzustand sondern in einem angeregten Zustand befindet, kann es auf zwei Arten in den Grundzustand gelangen. Entweder durch emittieren eines γ -Quantums oder durch innere Konversion. Innere Konversion entspricht der diskreten Energie, die abgegeben wird an ein Elektron im Atom. Man kann die Energie der Konversionselektronen messen. Zur Bestimmung der Konversionskoeffizienten misst man die Energie-Spektren der Elektronen.

3 Experimenteller Aufbau

3.1 Magnetisches Spektrometer

Durch Ablenkung von geladenen Teilchen im Magnetfeld lässt sich deren Impuls bestimmen. Die Bahn entspricht einer Kreisbahn mit Radius r , wenn die Lorentzkraft gleich der Zentripetalkraft ist. Die Gleichung $q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = \frac{m \cdot v^2}{r} \cdot \hat{r}$ wird für $\vec{v} \perp \vec{B}$ zu $p = r \cdot q \cdot B$. Das Magnetfeld ist über den Strom einstellbar $B(I) = const \cdot I$. Die Konstante wird durch eine Eichung bestimmt. Man nimmt das Spektrum auf. Die Peaks haben charakteristische Energien, daraus wird die Konstante bestimmt.

Die Eichung der Impulsskala $p = r \cdot q \cdot const \cdot I = const \cdot I$ kann mit 2 bekannten Werten $p(I) = p(0) = 0$ und $p(I_{peak}) = const \cdot I = p_{peak}$ vorgenommen werden, da die Energie (und somit der Impuls) der Elektronen, die durch innere Konversion entstehen, bekannt ist.

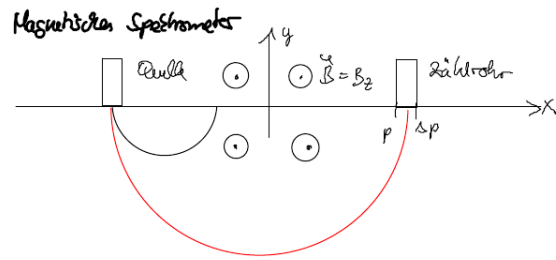


Abbildung 3:
Magnetische Spektrometer

3.1.1 $\pi \cdot \sqrt{2}$ -Spektrometer

Der einfache Aufbau mit einem Magnetfeld in z-Richtung, Quelle und Zähler an der x-Achse erlaubt es, nur Elektronen bestimmter Energie zu messen. Man verliert dabei jedoch alle Elektronen, die nicht nur einen Impuls in y-Richtung sondern auch noch einen Impuls in z-Richtung oder in x-Richtung haben. Legt man jedoch ein inhomogenes Magnetfeld an, kann man Elektronen die nicht genau in die Richtung der Kreisbahn emittiert werden um die Soll-Bahn schwingen lassen. Die Soll-Bahn ist dabei die Bahn, die ein Elektron nimmt, wenn es genau parallel zu dieser Kreisbahn emittiert wird, also keinen Impuls in z- oder x-Richtung bekommt.

In diesem Versuch ist das Magnetfeld in z-Richtung und fällt mit $\frac{1}{\sqrt{r}}$ in radialer Richtung ab. Dieses Verhalten wird durch den Aufbau der Polschuhe gewährleistet. Das Zählrohr ist in einem Winkel von 235° zur Quelle aufgestellt, da sich dort die Elektronen gewünschter Energie gerade wieder treffen - die Abbildung der Quelle also am besten ist.

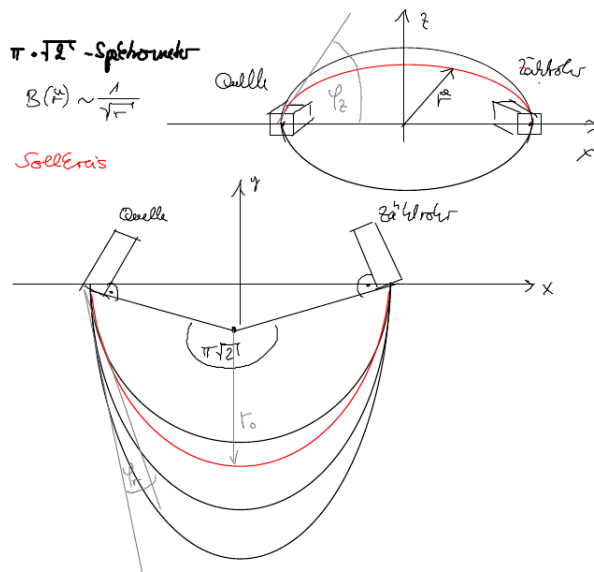


Abbildung 4:
 $\pi \cdot \sqrt{2}$ -Spektrometer

3.2 Geiger-Müller-Zählrohr

Das Zählrohr besteht im wesentlichen aus einem Zylinder, der mit einem Gas unter geringem Druck gefüllt ist. In den Zylinder ragt ein isolierter Draht. Zwischen Draht und Rohr liegen ca. 460V an. Fliegt nun ein Elektron durch das Gas, ionisiert es dort Gasatome. Die gelösten Elektronen werden durch die Hochspannung beschleunigt und ionisieren weitere Atome. Durch diesen Lawineneffekt wird ein messbarer elektrischer Impuls erzeugt.

Das Auslösezählrohr weist die ionisierende Strahlung nur nach, kann jedoch nicht ihre Energie bestimmen. Dazu wird in diesem Versuch das Spektrometer mit seinem Magnetfeld verwendet.

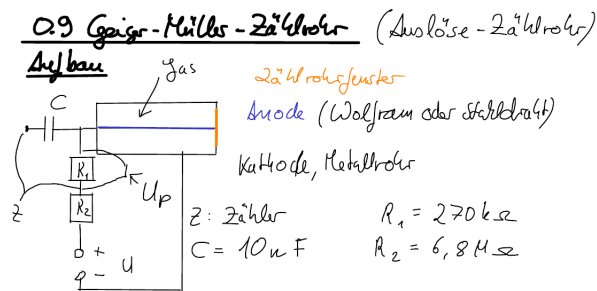


Abbildung 5:

Geiger-Müller-Zählrohr (Quelle: unserer Vorbereitung P2- β , γ -Absorption)

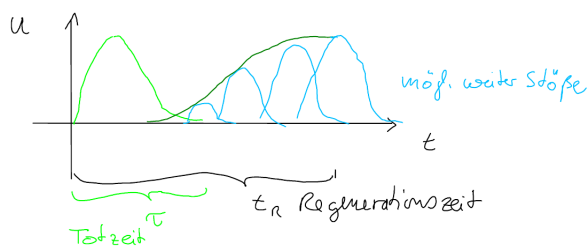


Abbildung 6:

Totzeit des Zählrohrs (Quelle: unserer Vorbereitung P2- β , γ -Absorption)

4 Durchführung

4.1 Aufnahmen der Untergrundzählrate

Zunächst nimmt man bei ausgeschalteter Spule die Untergrundzählrate auf. Dabei wird bereits automatisch der Fehler durch die restliche γ -Strahlung der Quelle, die evtl. durch die Abschirmung durch kommt, berücksichtigt. Diese Zählrate ist dann von den jeweiligen gemessenen Zählraten abzuziehen.

4.2 Aufnahmen des β -Spektrums von ^{137}Cs

Nun nimmt man bei steigendem Spulenstrom ein Spektrum von ^{137}Cs auf. Der Strom wird dabei von 1,5A in 0,2A Schritten bis 8A geregelt. Dann wird die Schrittweite auf 0,02A verkleinert, um die Konversionslinien des Zerfallsproduktes ^{137}Ba sauber aufzulösen. Pro Messpunkt sollte ca. 60s gemessen werden, um den statistischen Fehler klein zu halten. Während der Messung ist der Druck von .. auf ... gesunken.

4.2.1 Eichung

Da die Energie der Konversionslinie bekannt ist, kann man mit ihr und dem Nullpunkt die Energieskala des aufgenommenen Spektrums eichen. Das Vorgehen, mit der gleichen Probe die Skala zu eichen und dann das Spektrum auszuwerten, ist natürlich normalerweise nicht korrekt.²

²Allerdings sollen in diesem Versuch auch keine neuen Effekte gezeigt werden, wofür eine korrekte Eichung notwendig wäre.

5 Auswertung

5.1 Eichung und Spektrum von ^{137}Cs

Von der gemessenen Zählrate wird zunächst die Untergrundrate und in grober Näherung das Spektrum der Zerfälle direkt in den Grundzustand abgezogen.

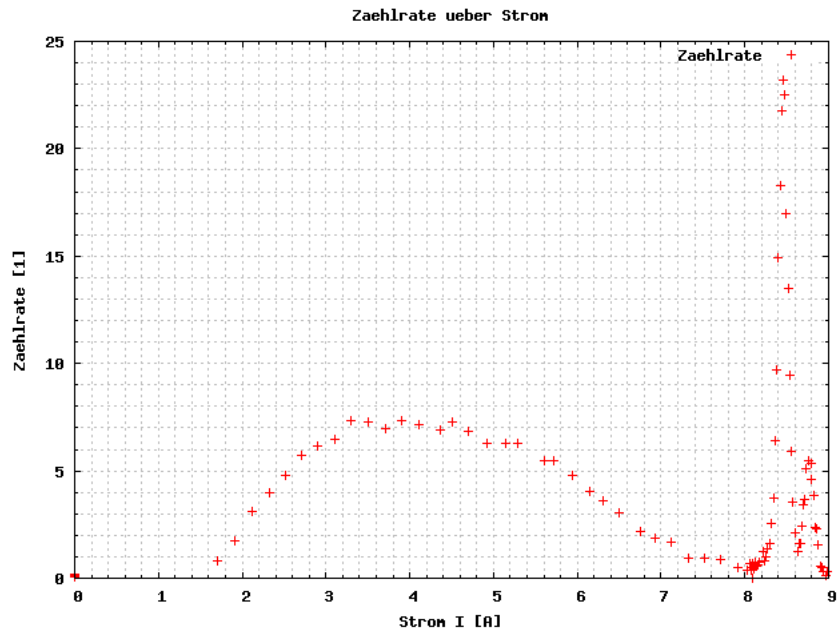


Abbildung 7:
gemessene Zählrate abzüglich Untergrund und 3,6% über dem gemessenen Strom

Zur Eichung verwenden wir die Konversionsenergien und den Nullpunkt $I=0$ und $p=0$.

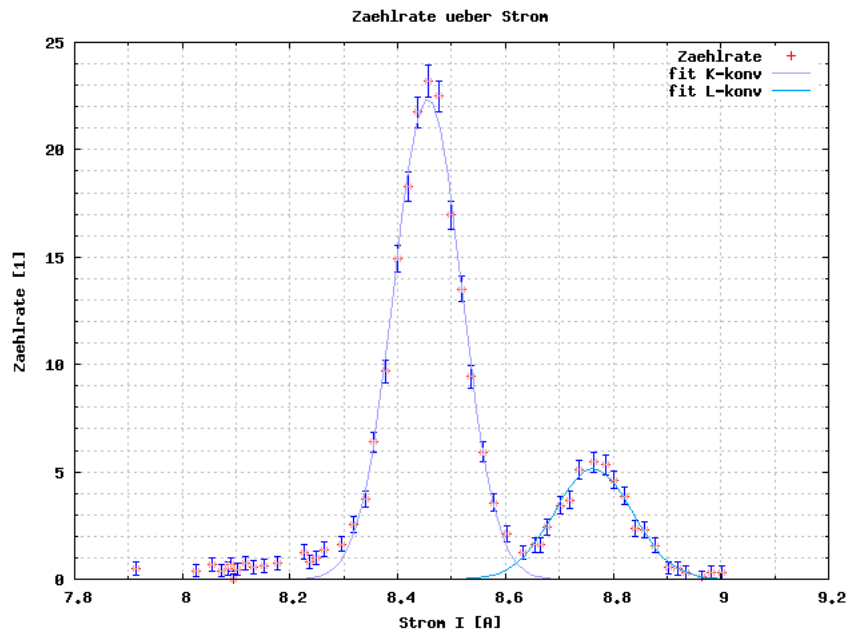


Abbildung 8:
Gauß-Verteilung auf den K-Konversionspeak und den L-Peak gefittet

Aus dem linearen Zusammenhang von $p = k \cdot I + 0$ und dem Vergleich von der Übergangsenergie mit dem Peak im gemessenen Spektrum berechnen wir die neue Skala. Die wahre Zählrate ist

$Z(p) = \frac{N(I)}{I}$ da die Zählrate N vom Impuls abhängt.

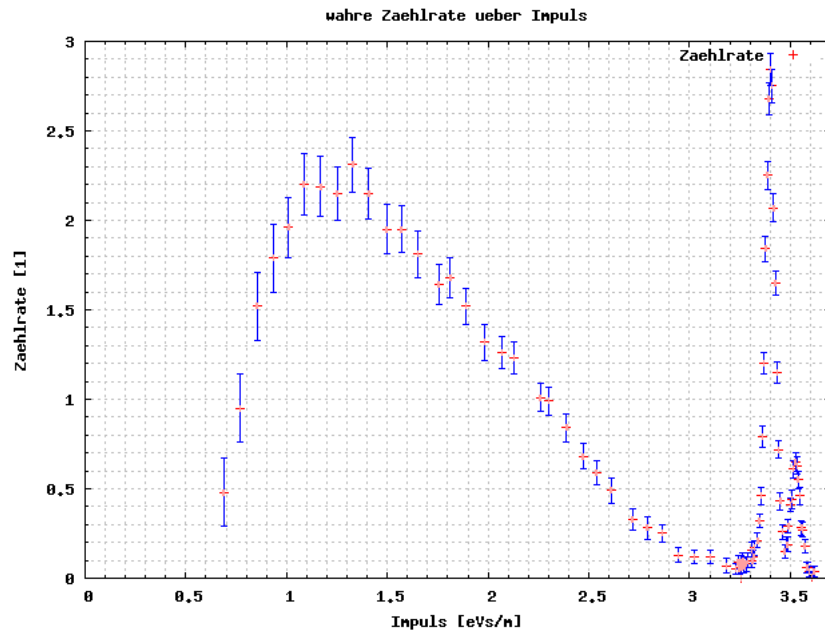


Abbildung 9:
wahre Zählrate über Impuls

Nach einiger Rechnung (siehe Anhang) erhält man den Kurie-Plot $y(\varepsilon) = \sqrt{\frac{Z(\eta)}{\eta \cdot \varepsilon \cdot G(\eta, Z)}} = a \cdot (\varepsilon_0 - \varepsilon)$.

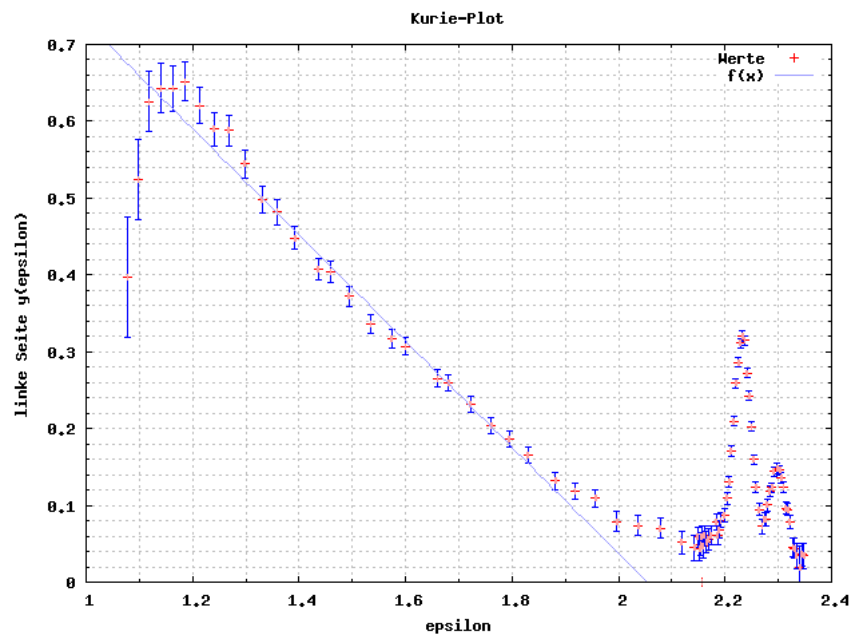


Abbildung 10:
Kurie-Plot mit Gerade, um a und $a\varepsilon_0$ zu berechnen

Aus diesen Werten reproduzieren wir das β^- -Spektrum für die weitere Auswertung. So kann man z.B. die Werte mit einem Strom unterhalb $I = 1,5A$ errechnen.

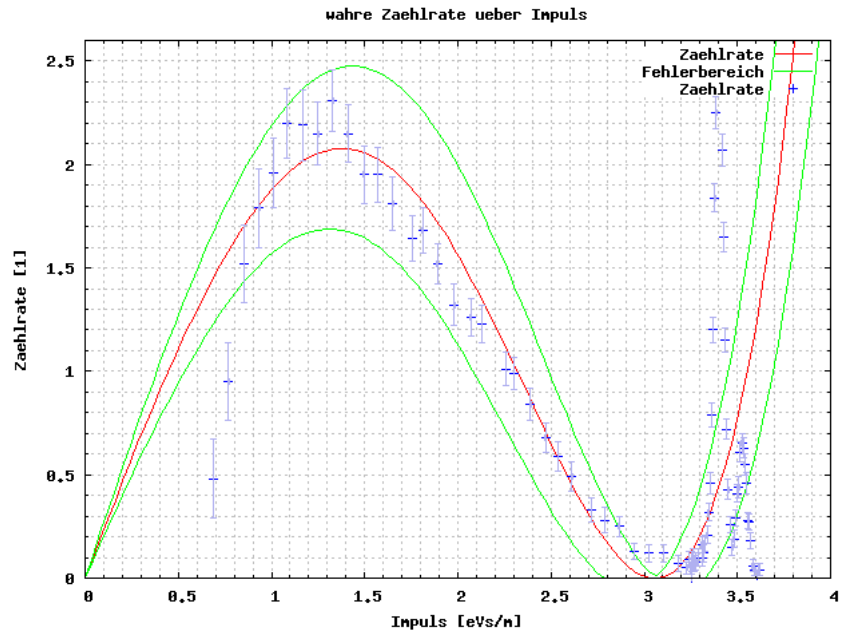


Abbildung 11:
aus dem Kurie-Plot analytisch rekonstruierte Zählrate über dem Impuls. Die Punkte sind die Werte wie in Abb. 9.

5.2 Übergangsenergie von $^{137}\text{Cs} \rightarrow ^{137m}\text{Ba}$

An den Kurie-Plot kann man im erkennbar linearen Bereich zwischen 1,2 und 1,9 eine Gerade anpassen. Für sie erhält man $y(\varepsilon) = -a\varepsilon_{e^-} + a\varepsilon_0$ mit $a = 0,691 \pm 0,018$ und $a\varepsilon_0 = 1,42 \pm 0,03$.

Daraus kann man die Übergangsenergie bestimmen: $\varepsilon_0 = 2,05 \pm 0,07$ und $E_0 = m_0 \cdot c^2(\varepsilon_0 - 1) = (0,54 \pm 0,03)\text{MeV}$. Die wahre Übergangsenergie $E_0 = 0,512\text{MeV}$ liegt innerhalb des Fehlerintervalls.

5.3 Analyse des Konversionsspektrums von $^{137m}\text{Ba} \rightarrow ^{137}\text{Ba}$

5.3.1 Konversionskoeffizienten und Konversionsverhältnisse

Zur Bestimmung der Konversionskoeffizienten bestimmen wir zunächst die Flächen unter den Konversions-Peaks A_K , A_L und A_β im rekonstruierten β^- -Spektrum. Berechnet man aus den Ergebnissen des Kurie-Plots das Spektrum neu, kann man diese Funktion integrieren, um die Fläche darunter zu erhalten: $A_\beta = 3.69 \pm 0.8 \pm 0.013$. Für die Fläche unter den Konversionspeaks integrieren wir angepassten Gauß-Funktionen, wie wir sie schon zur Eichung des Spektrums verwendet haben: $A_K = 0.176 \pm 0.004$, $A_L = 0.0435 \pm 0.0011$.

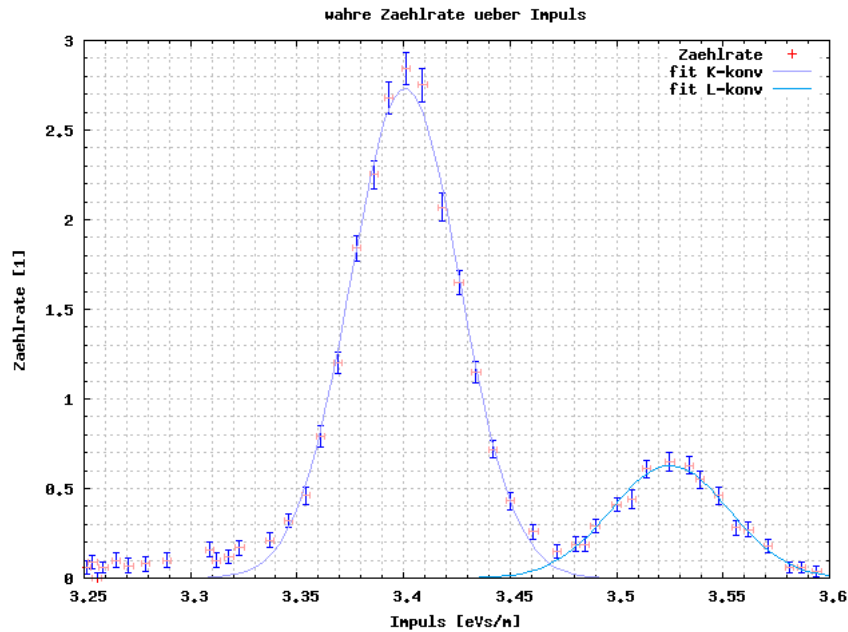


Abbildung 12:
Gauß-Verteilung an Konversionspeaks gefittet

Aus der Formeln für die Koeffizienten $\alpha_{K/L} = \frac{A_{K/L}}{(A_{\beta} - A_K - A_L)}$ erhalten wir $\alpha_K = (51 \pm 12 \pm 0, 2) \cdot 10^{-3}$ und $\alpha_L = (13 \pm 3 \pm 0, 05) \cdot 10^{-3}$.

5.3.2 Multipolordnung der Strahlung

Durch den Vergleich der Konversionskoeffizienten mit den tabellierten Werten im blauen Buch kann man sagen, zu welcher Multipolordnung der Übergang gehört. Die Energie des Übergangs ist $E_{\gamma} = 662 \text{keV}$, liegt also zwischen 510keV und 740keV für die L-Übergang bzw. zwischen 540keV und 770keV für die K-Übergänge, so dass man die Tabellenwerte in diesem Bereich interpolieren muss.

Interpoliert man linear, erhält man beim K-Konversion für M2 $\alpha = 19 \cdot 10^{-3}$, M3 $\alpha = 49 \cdot 10^{-3}$ und für M4 $\alpha = 123 \cdot 10^{-3}$. Unser Wert passt also sehr gut zur Ordnung M3. Bei der L-Konversion ergibt die Interpolation für M3 $\alpha = 8.15 \cdot 10^{-3}$ und für M4 $\alpha = 24.4 \cdot 10^{-3}$. Unser Wert liegt genau dazwischen, was eine Zuordnung erschwert.

Tatsächlich sollte die Konversion zur Multipolordnung M4 gehören.

6 Anhang

6.1 Rechnung

6.2 Tabellen

6.2.1 Zählrate, Untergrund

Seite 1-3: gemessene Werte, Korrektur Untergrund und direkter Zerfall (3,6%) (weitere Messwerte nicht ausgedruckt)

6.2.2 Fermifunktion

Seite 4: Interpolationspolynom für Fermi-Funktion

6.2.3 red.Rate (Impulsskala, Eichung)

Seite 5+6: Berechnen der Impuls-Skala (weitere Werte nicht ausgedruckt)

6.2.4 Kurie-Plot

Seite 7+8: Berechnen der notwendigen Werte (weitere Werte nicht ausgedruckt)

6.2.5 β^- -Spektrum

Seite 9: Rechnung zu den Konversionskoeffizienten

6.3 Fehlerrechnung

- Fehlerfortpflanzung einer Funktion: $\sigma_{f(x,y,\dots)} = \sqrt{\sigma_x^2 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \sigma_y^2 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \dots}$
- statistischer Fehler (Poisson-Verteilung): $\sigma_x = \sqrt{x}$
- Standardabweichung vom Mittelwert (Abschätzung für systematischen Fehler):

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \text{ und } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- relativer Fehler von R: $\frac{\sigma_R}{R}$
- Notation:

(Wert \pm statistischer Fehler \pm systematischer Fehler) bzw. (Wert \pm statistischer Fehler)