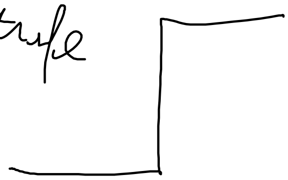
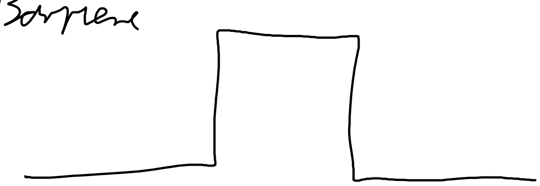
# Stufenpotentiale

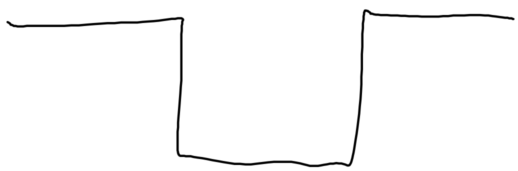
a) Stufe



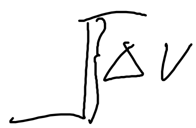
b) Barriere



c) Topf



Anschlussbedingung bei Stufe




$\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ stetig,

$\varphi''(x)$ nicht stetig:

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x_0+\varepsilon) - \frac{d}{dx^2}\varphi(x_0-\varepsilon) = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\Delta V\right)\varphi(x_1)$$

## 3) Stufenpot. quantitativ:

(i) $E > V$

$$\varphi(x) = A e^{ikx} + A' e^{-ikx}$$

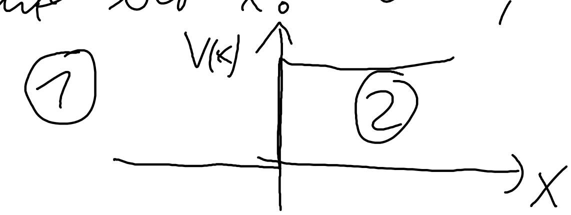
$$\left(\frac{\hbar k}{2m}\right)^2 = E - V$$

(ii) $E < V$ : $k$ imaginär $\Rightarrow e^{\rho}$ mit $\rho$ reell

(iii) $E = V$ $\quad \varphi(x) = c + c'x$

### Beispiel

a) Stufe bei $x_0 = 0$, $E > V_0$



Einfallend + Reflektiert

① $\varphi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + A_1' e^{-ik_1 x}$

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

② $\varphi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + A_2' e^{-ik_2 x}$ Transmission

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}}$$

4 unbekannte, wieviele Gleichung?

(1) Stetigkeit bei $x = 0$

$$A_1 + A_1' = A_2 + A_2'.$$

(2) Stetigkeit der 1. Ableitung

$$k_1(A_1 - A_1') = k_2(A_2 - A_2')$$

(3) Sprungbed. folgt aus der Wahl von $k_1$ und $k_2$

- Normierung ist unbestimmt
  ⇒ nur Verhältnisse zw. $\frac{A_1'}{A_1}$, $\frac{A_2'}{A_2}$
  (analog zur Optik, $T$, $R$)

oder man setzt $A_1 = 1$

wähle $A_2' = 0$ (Randbedingung)

in ② nur auslaufende Welle (Transmission)
in ① anlaufende Welle und reflektierte Welle

(1), (2) ($A_2' = 0$)

$$\Rightarrow \frac{A_1'}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad \frac{A_2}{A_1} = -\frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

$A_1 = 1$ (Konvention)

$$\varphi(x) = \begin{cases} \underbrace{e^{ikx}}_{\text{einlaufend}} + \underbrace{\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{-ik_1 x}}_{\text{reflektiert}} & x < 0 \\ \underbrace{\frac{2k_1}{k_1 + k_2} e^{ik_2 x}}_{\text{transmittiert}} & x > 0 \end{cases}$$

Energiebilanz:

Reflexionskoeffizient

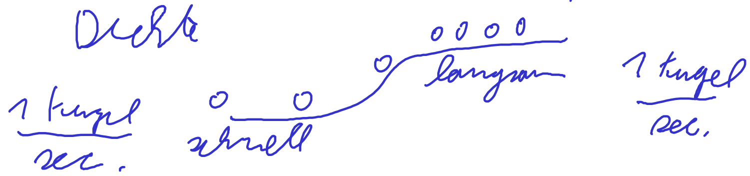
$$R = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2$$

Verhältnis der Impulse
= Verhält. der Geschwind.
$\hat{=}$ Verhältnis der Flüsse

Transmissionskoeff.

$$T = \left| \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right|^2$$

Nach der Stufe ist der Strom erhalten, nicht die Dichte



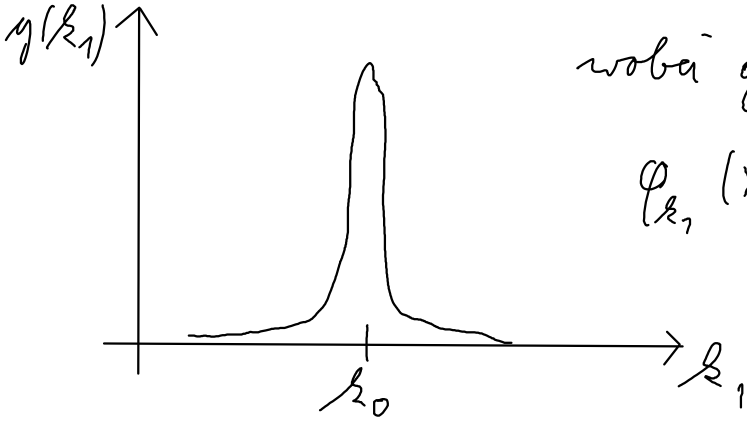

$$R + T = 1$$ (und das ist gut so)

## Zusammenhang mit Wellenpaketen und zeitabhängige Beschreibung

Überlagerung von ebenen Wellen und Verteilung $g(k_1)$

$\Rightarrow$ zeitabhängige Lösung:

$$\varphi(x,t) = \int \frac{dk_1}{\sqrt{2\pi}} \, g(k_1) \, \varphi_{k_1}(x) \, e^{-i\omega_{k_1} t}$$




wobei $g(k_1)$ bei $k_0$ konzentriert ist

$$\varphi_{k_1}(x) = \begin{cases} e^{ik_1x} + \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\, e^{-ik_1x} & : x<0 \\ \frac{2k_1}{k_1+k_2}\, e^{ik_2x} & x>0 \end{cases}$$

Verhalten von $\varphi(x,t)$ für $t\to-\infty$

$$\varphi(x,t) \underset{t\to-\infty}{\approx} \int \frac{dk_1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ik_1x - i\omega_{k_1}t}\, g(k_1)$$

Der zweite Term verschwindet (oszilliert sich weg) ?

Es bleibt das Wellenpaket bei $x = \frac{\hbar k_0 t}{m}$

mit Amplitude 1

Für $t\to+\infty$

Wellenpaket bei neg. $x = -\frac{\hbar k_0 t}{m}$

und Amplitude $$\frac{k_0 - \sqrt{k_0^2 - \frac{2m}{\hbar^2}V_0}}{k_0 + \quad ''}$$

und Wellenpaket bei pos. $x = \hbar\sqrt{k_0^2 - \frac{2m}{\hbar^2}V_0}\; t$

mit rel. Amplitude $$\frac{2k_0}{k_0 + \sqrt{k_0^2 - \frac{2m}{\hbar^2}V_0}}$$

und um $\frac{\sqrt{u}}{k_0}$ reduzierter Breite

Rechnung für den Transmissions-Anteil:

$$\int \frac{dk_1}{\sqrt{2\pi}}\, g(k_1)\, e^{ik_2x}$$

$$k_2 = \sqrt{k_1^2 - \frac{2mV_0}{\hbar^2}} \approx$$

$$\sqrt{k_0^2 - \frac{2mV_0}{\hbar^2}} + (k_1 - k_0)\frac{k_0}{\sqrt{\;''\;}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dk_1}{\sqrt{2\pi}} g(k_1) e^{ik_2 x} = \int \frac{dk_1}{\sqrt{2\pi}} g(k_1) e^{i\left[\sqrt{\;''\;} + \frac{(k_1-k_0)k_0}{\sqrt{\;''\;}}\right]\cdot x}$$

$$= e^{i\left(\sqrt{\;''\;} - \frac{k_0^2}{\sqrt{\;''\;}}\right)x} \int \frac{dk_1}{\sqrt{2\pi}} g(k_1) e^{ik_1 \underbrace{\frac{k_0}{\sqrt{\;''\;}}}_{\text{Änderung der Breite}} x}$$

b) Stufe, $E < V_0$

$$\Rightarrow k_2 \longrightarrow i\rho_2 = i\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

$$\varphi_2 = B_2 e^{\rho_2 x} + B_2' e^{-\rho_2 x}$$

Forderung: exp. Abfall im verbotenen Bereich

$$B_2 = 0$$

Bzg. wie bei (a) mit $k_2 \rightarrow i\rho_2$

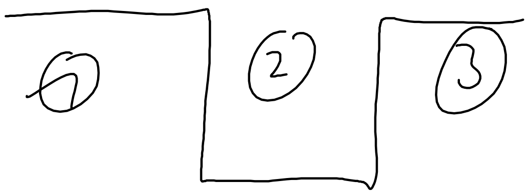
Transmission $T = 0$

$$\frac{A_1'}{A_1} = \frac{k_1 - i\rho_2}{k_1 + i\rho_2} \qquad \text{Reflex. } R = \left|\frac{A_1'}{A_1}\right|^2 = 1$$

Totalreflexion, Änderung der Phase

$\hat{=}$ Phasensprung $\Rightarrow$ Laufzeitunterschied

(c) Potentialtopf $\quad -V_0 < E < 0$



$$\varphi_1 = B_1 e^{\rho x} + \cancel{B_1' e^{-\rho x}}$$ bzg. gedämpft

$$\varphi_3 = \cancel{B_3 e^{\rho x}} + B_3' e^{-\rho x}$$

$$\varphi_2 = A_2 e^{ikx} + A_2' e^{-ikx}$$

$$\rho = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}} \qquad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 + E)}$$

$(V + E > 0)$

quadratintegrable bzg

$\Rightarrow B_1' = B_3 = 0$

4 Konst. $\quad B_1, B_3', A_2, A_2'$

4 Anschlussbed.

$\Rightarrow$ nicht alle $E$ erlaubt