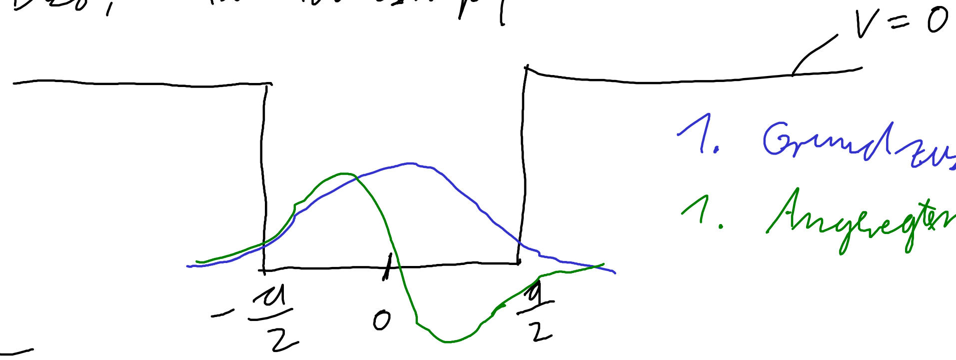
Theo, Potentialtopf 30. 4. 08



1. Grundzustand
1. Angeregter Zustand

mit $E > 0$: Streuzustände
Reflexion u. Transmission
$\Rightarrow$ Phasenverschiebung, ...

alles schon letztes mal

bei uns $E < 0$ (aber $V_0 < E$)

Ansatz usw. (letztes mal)

$$\varphi_1 = B_1 e^{\rho x} \qquad \varphi_3 = B_3' e^{-\rho x}$$

$$\varphi_3 = A_2 e^{ikx} + A_2' e^{-ikx}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} \qquad k = \sqrt{\frac{2m(V+E)}{\hbar^2}}$$

4 Anschlussbedingungen + Normierung, 4 Unbekannte + Energie (d.h. Energie nicht beliebig)

Anschlussbed.

φ bei $x = \pm \frac{a}{2}$ stetig und stetig diffbar

$$\frac{A_2}{A_2'} = \frac{ik+\rho}{ik-\rho} e^{ika} \qquad \left(\text{bei } x = +\frac{a}{2}\right)$$

$$\frac{A_2}{A_2'} = \frac{ik-\rho}{ik+\rho} e^{-ika} \qquad \left(\text{bei } x = -\frac{a}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{ik-\rho}{ik+\rho}\right)^2 = e^{2ika}$$

Eigenwertgleichung für k (bzw E)

mit ρ und k siehe oben.

$$\left(\frac{ik-\rho}{ik+\rho}\right)^2 e^{-2ika} = 1$$

daran sieht man: $\frac{A_2}{A_2'} = \pm 1$

Fall 1

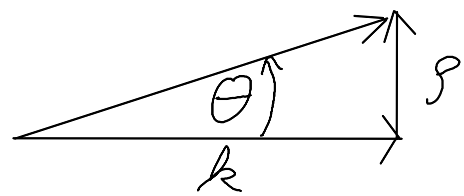
$$\frac{ik-\rho}{ik+\rho} = e^{ika}$$

Fall 2

$$\frac{ik-\rho}{ik+\rho} = -e^{ika}$$

„trickreiche Algebra"

$$\frac{k+i\rho}{k-i\rho} =: e^{2i\theta}$$



θ ist Phase von $k+i\rho$

wobei $\tan\theta = \frac{\rho}{k}$

oder $\theta = \arctan\left(\frac{\rho}{k}\right)$

$$e^{ika} = e^{2i\theta} \quad \text{oder} \quad e^{ik\frac{a}{2}} = e^{i\theta}$$

$$\frac{\rho}{k} = \tan\frac{ka}{2} \qquad \text{graphisch lösen}$$

oder vereinfachen

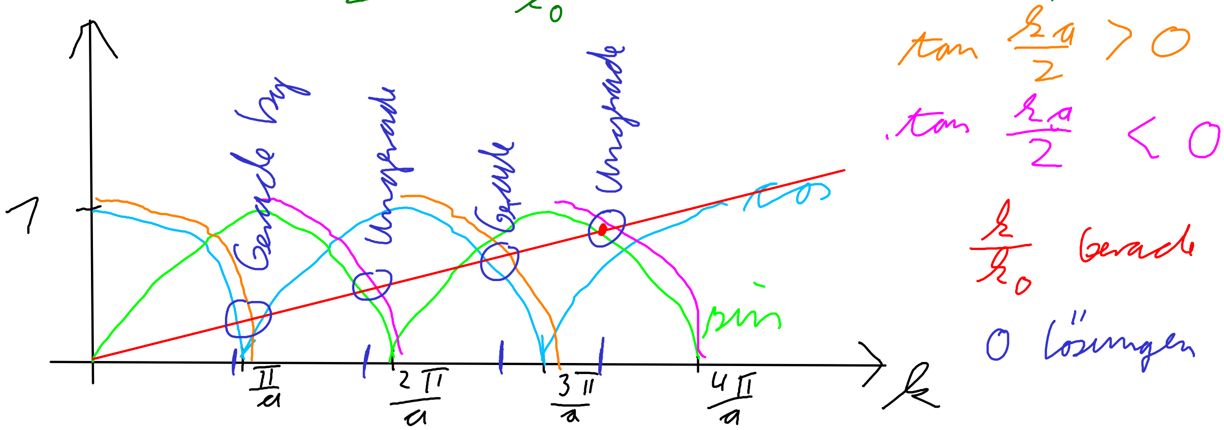
$$1+\tan^2\frac{ka}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{ka}{2}} = 1+\frac{\rho^2}{k^2} = \frac{\frac{2mV^2}{\hbar^2}}{k^2}$$

$$\Rightarrow \left|\cos\frac{ka}{2}\right| = \frac{k}{k_0} \quad \text{mit} \quad k_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$$

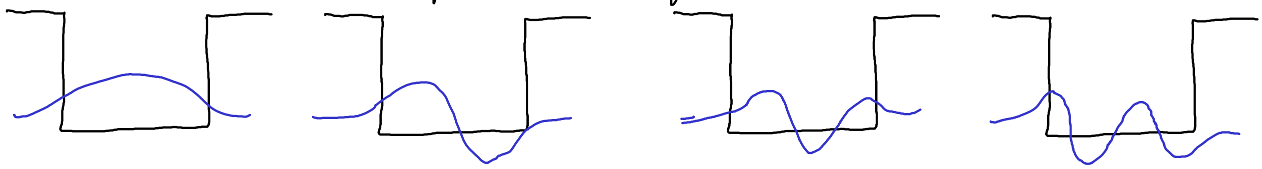
Graphische Lösung.

Für den Fall ② folgt analog:

$$\left|\sin\frac{ka}{2}\right| = \frac{k}{k_0} \quad \text{und} \quad \tan\left(\frac{ka}{2}\right) < 0$$



Gerade und ungerade Lsg. wechseln sich ab:



anschließende Berechnung von $A_2, A_2', \ldots B_1, B_1'$

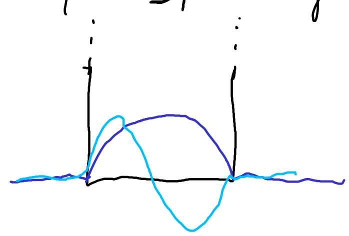
Grenzfall $V_0 \to \infty$, $\frac{k}{k_0} \to \frac{k}{\infty}$, sehr flach

$\Rightarrow$ Lösungen bei $n \cdot \frac{\pi}{a}$ $\qquad (n \in \mathbb{N})$

? 2te Ableitung

Randbed.: φ stetig, φ' Sprung

$$E = \frac{1}{2m}\left(\frac{n \pi \hbar}{a}\right)^2$$



Grenzfall $V_0 \to 0$

ein Lsg. bleibt erhalten

II Mathematische Hilfsmittel

Wellenfkt. $\psi(x,t)$ sehr spezielle Beschreibung

$|\psi|^2 \Rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsverteilung als Fkt. von x

$|\tilde{\psi}|^2 \Rightarrow$ " " " " p

Alternative: Angabe der Energie des Systems E_n falls Eigenzustand

(analogie klass. System: Ort und Geschwind. bei $t = t_0$)

Messwerte: „Erwartungswerte" (= Mittelwert)

z.B. Mittelwert $\langle p \rangle$ des Impulses

$$\langle p \rangle = \int dp \, \tilde{\psi}^*(p) \, \tilde{\psi}(p) \cdot p = \int dx \, \psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)$$

Ziel: Abstrakte Beschreibung des Zustands eines QM. Systems als Element in einem Zustandsraum (linearer Raum) : Hilbertraum

(unendlichdimensional, komplexe einträge)

Matrixelemente von Operatoren im Hilbertraum
$\hat{=}$ Messgrößen

A) {Wellenfkt.} als Zustandsraum
Menge der

1) Zustandsraum $\mathcal{F}$

{quadratintegrable Fkt} $=: L^2$

hier oft zusätzliche Einschränkungen, abhängig vom Problem
(z.B. stetig, beschränkt, nur im Intervall $[a,b] \neq 0$)

$$\mathcal{F} =: \{\text{genügend reguläre Fkt} \in L^2\}$$

$\mathcal{F}$ ist linearer Raum

$$\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 \in \mathcal{F}$$

dies gilt, da $|\psi|^2$ ebenfalls quadratintegrabel

Beweis $|\psi|^2 = |\lambda_1|^2 |\psi_1|^2 + |\lambda_2|^2 |\psi_2|^2 + 2 \operatorname{Re} \lambda_1 \lambda_2^* \psi_1 \psi_2^*$

$< |\lambda_1 \lambda_2| (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)$ $\quad (2 \psi_1 \psi_2^* < |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)$

Skalarprodukt

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int d\vec{r}\ \varphi^*(\vec{r})\ \psi(\vec{r})$$

Es gilt $\langle \varphi, \psi \rangle^* = \langle \psi, \varphi \rangle$

$\langle \varphi, \psi \rangle$ ist $\left\{ \begin{array}{c} \text{linear} \\ \text{antilinear} \end{array} \right\}$ bzgl. $\left\{ \begin{array}{c} \psi \\ \varphi \end{array} \right\}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \langle \varphi, \lambda \psi \rangle = \lambda \langle \varphi, \psi \rangle \\ \langle \lambda \varphi, \psi \rangle = \lambda^* \langle \varphi, \psi \rangle \end{array}$$