P. Marquardt hält Vorlesung

WDH

① Falls $[A, B] = 0$ (Operatoren kommutieren)

$\Rightarrow \exists$ orthonormale Basis mit Basisvektoren die simultan EV zu A und B sind

② Vollständiger Satz von Observablen

- alle Operatoren vertauschen untereinander
- System von Eigenvektoren ist nicht mehr entartet

Anmerkung

Wenn Operator O mit allen Operatoren des vollständigen Satzes von Operatoren kommutiert, dann ist er als Funktion dieser Operatoren darstellbar.

Bsp. 1 dim:

O kommutiert mit x (also $[O, x] = 0$)

$\Rightarrow$ O ist Funktion von x

„Ket" (oder „Bra") werden oft durch die Eigenwerte eines vollständigen Satzes von Operatoren charakterisiert.

Bsp: ebene Welle mit Impuls p $|p\rangle$

$|E_0\rangle$ Grundzustand des Hamilton-operators mit Energie E_0

$|n, l, m\rangle$ Energie $\sim n^2$,

Drehimpuls $\vec{L}^2 = l(l+1)\hbar^2$

$L_z = m\hbar$

weitere Bsp.

Observable Impuls

{ Eigenzustände $|E\rangle$ } Basis

$$\langle p_0, p_0' \rangle = \delta(p_0 - p_0')$$

Impulsdarstellung der Wellenfkt

$$\langle p | \psi \rangle = \tilde{\psi}(p)$$

p_0 Wert

p Operator

Observable Ort:

{ Eigenzustände $|x_n\rangle$ } = Basis

$$\langle x, x' \rangle = \delta(x - x')$$

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$$

Observable Energie:

{ Eigenzustände $|E_i\rangle$ }

$$\langle E_i | E_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$\langle E_n | \psi \rangle$$

Funktionen von Operatoren

$$f(A)$$

Fall 1: A ist in der aktuellen Darstellung diagonal

$$\langle i | A | j \rangle = \langle i | a_j | j \rangle = a_j \delta_{ij}$$

in Matrixschreibweise

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$$

$$\langle i | f(A) | j \rangle = f(a_j)\, \delta_{ij}$$

$$(1, 0, 0 \dots) \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = a_1$$

Fall 2 $\quad$ A nicht diagonal

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Operator in Operatoren Entwickeln

also $\quad f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$

wichtiges Bsp

$e^{ia\frac{P}{\hbar}}$ $\quad$ P Impulsoperator

a Konstante $\in \mathbb{R}$

Impulsoperator $\quad \langle p_0' | e^{ia\frac{P}{\hbar}} | p_0 \rangle$

$$= \langle p_0' | e^{ia\frac{p_0}{\hbar}} | p_0 \rangle$$

$$= e^{ia\frac{p_0}{\hbar}} \langle p_0' | p_0 \rangle = \exp\left(ia\frac{p_0}{\hbar}\right) \delta(p_0' - p_0)$$

$$\langle p_0 | \exp\left(ia\frac{P}{\hbar}\right) | \psi \rangle = \int dp_0' \langle p_0 | \exp\left(ia\frac{P}{\hbar}\right) | p_0' \rangle \langle p_0' | \psi \rangle$$

$$= \int dp_0' \, e^{ia\frac{p_0}{\hbar}} \delta(p_0 - p_0') \tilde{\psi}(p_0')$$

$$= \exp\left(ia\frac{p_0}{\hbar}\right) \tilde{\psi}(p_0)$$

Operator $\exp\left(ia\frac{P}{\hbar}\right)$ im Ortsraum

$$P = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$$

$$\exp\left(ia\frac{P}{\hbar}\right) = \exp\left(a\frac{d}{dx}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(a\frac{d}{dx}\right)^n$$

$$\langle x | \exp\left(ia\frac{P}{\hbar}\right) | \psi \rangle$$

$$= \int dx' \langle x | \exp\left(a\frac{d}{dx}\right) | x' \rangle \langle x' | \psi \rangle$$

$$= \int dx' \exp\left(a\frac{d}{dx'}\right) \delta(x - x') \psi(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n \psi^{(n)}(x) = \psi(x+a)$$

$\hat{=}$ Taylorentwicklung von ψ um a

Bemerkung Impulsoperator generiert Translation im Ortsraum

Beispiel Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

Ortsdarstellung

$$\langle x_0 | p^2 | x_0' \rangle = \left(i\hbar \frac{d}{dx}\right)^2 \delta(x_0 - x_0')$$

$$\langle x_0 | V(x) | x_0' \rangle = V(x_0)\, \delta(x_0 - x_0')$$

$$\langle x_0 | H | \psi \rangle = \int dx_0' \langle x_0 | H | x_0' \rangle \langle x_0' | \psi \rangle$$

$$= \int d\underline{x_0}' \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{d\underline{x}^2}\right) + V(\underline{x}_0)\right] \delta(\underline{x}_0 - \underline{x}_0')\, \psi(\underline{x}_0)$$

Striche ?

$$= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{d\underline{x}_0^2} + V(\underline{x}_0)\right] \psi(\underline{x}_0)$$

$$\langle x_0 | H | \psi \rangle = E \langle x_0 | \psi \rangle$$

$\Rightarrow$ DGL für $\psi(x_0)$

Impulsraum

$$\langle p_0 | p^2 | p_0' \rangle = p_0^2\, \delta(p_0 - p_0')$$

$$\langle p_0 | V(x) | p_0' \rangle = \int dx_1\, dx_2 \langle p_0 | x_1 \rangle \langle x_1 | V(x) | x_2 \rangle \langle x_2 | p_0' \rangle$$

$$= \int dx_1\, dx_2\, V_{p_0}^*(x_1)\, V_{p_0'}(x_2)\, V(x_2)\, \delta(x_1 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \exp(-i(p_0' x_2 - p_0 x_1)/\hbar)$$

$$= \int dx_1\, dx_2 \frac{1}{2\pi\hbar} \exp(-i(p_0' x_2 - p_0 x_1)/\hbar)\, \delta(x_1 - x_2)\, V(x_2)$$

$$= \int dx_1 \frac{1}{2\pi\hbar} \exp(-i(p_0' - p_0) \frac{x_1}{\hbar}\, V(x_1))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tilde{V}(p_0' - p_0)$$

also: $\langle p_0 | H | \psi \rangle = \frac{p_0^2}{2m} \tilde{\psi}(p_0) + \int \frac{dp_0'}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tilde{V}(p_0' - p_0)\, \tilde{\psi}(p_0')$

$\Rightarrow$ Integralgleichung im Impulsraum

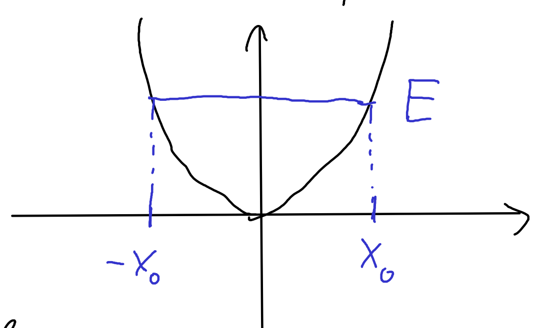
Kap 3 kommt nächste Woche

IV Der harmonische Oszillator

A) Einführung: HO der klassischen Mechanik

- Teilchen mit Masse m in einem Potential

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2$$



Bewegungsgleichung

$$m^2 \frac{d^2}{dx^2} x = -\frac{dV}{dx} = -kx$$

Lösung: $x(t) = X_0 \cos(\omega t - \varphi)$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

(falsch ?)

kinetische Energie

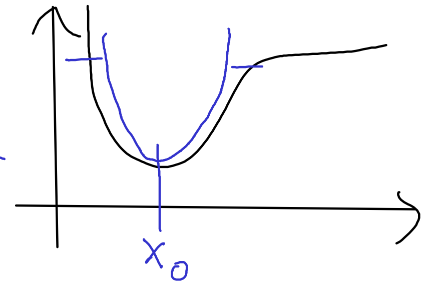
$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{d}{dt} x\right)^2 = \frac{p^2}{2m}$$

gesamte Energie

$$E = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 = \text{const}$$

Bem.

Die potentielle Energie $U(x)$ hat ein Minimum bei $x = x_0$



Näherung:

$$U(x) = \underbrace{U(x_0)}_{=0 \text{ o.B.d.A}} + \underbrace{U'(x_0)}_{=0 \text{ da Minimum}}(x-x_0) + \underbrace{\frac{1}{2} U''(x_0)(x-x_0)^2}_{= \text{harmon. Oszillator}} + \dots$$

Beispiel

- Oszillation von Atomen in Kristallen
- "Quantisierung" von Feldern (z.B. EM Feld)

B) der HO in der QM

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2$$

klass. Größen $\Rightarrow$ QM Operatoren

$\Rightarrow$ EW Gleichung

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2\right]\varphi(x) = E\,\varphi(x)$$

Lösungsverfahren 1

Analytische Lösung der DGL

setze $\hat{x} = x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$, $\varepsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$

$$\Rightarrow \left[\frac{d^2}{d\hat{x}^2} - \hat{x}^2 + 2\varepsilon\right]\varphi(\hat{x}) = 0$$

Verhalten von φ für große $\hat{x} \gg \varepsilon$:

$$G_\pm(\hat{x}) = \exp\left(\pm \frac{\hat{x}^2}{2}\right)$$

grober Lösungsansatz, welches Verhalten braucht eine mögl. Lösung?

$$\frac{d^2}{d\hat{x}^2} \exp\left(\pm \frac{\hat{x}^2}{2}\right) = \hat{x}^2 \exp\left(\pm \frac{\hat{x}^2}{2}\right) \pm \exp\left(\pm \frac{\hat{x}^2}{2}\right)$$

$G_\pm$ ist Lösung von $\left[\frac{d^2}{dx^2} - \hat{x}^2 \mp 1\right] G_\pm(\hat{x}) = 0$

Ansatz

$$\varphi(\hat{x}) = h_1(\hat{x}) \exp\left(-\frac{\hat{x}^2}{2}\right)$$

Einsetzen:

$$\Rightarrow \left[\frac{d^2}{d\hat{x}^2} - 2\hat{x}\frac{d}{d\hat{x}} + 2\varepsilon - 1\right] h(\hat{x}) = 0$$

$\exp\left(-\frac{\hat{x}^2}{2}\right)$ eingesetzt, bleibt diese DGL übrig