DGL von letztem mal:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 2\varepsilon - 1\right] h(x) = 0$$

Lösung mit Potenzreihe:

$$h(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}\, x^{2m+p} \qquad a_0 \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad (2m+p+2)(2m+p+1)\, a_{2m+2} = (4m+2p-2\varepsilon+1)\, a_{2m}$$

normierbare Lösung nur falls Reihe abbricht

$\Leftrightarrow$ Bedingung $(4m+2p-2\varepsilon+1) = 0$

$$(2m+p+2)(2m+p+1) = 0$$

für $m = -1$

(Reihe beginnt mit $m = 0$, vorher keine Beiträge)

$$\Rightarrow p(p-1) = 0$$

$$\varepsilon_n = 2m + p + \frac{1}{2} = n + \frac{1}{2} \qquad \boxed{n = 2m + p}$$

Quantisierungsbed. aus DGL:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 2n\right] h_n(x) = 0$$

Hermite Polynome sind Lösung $H_N(x)$

$$h_n(x) = N_n\, H_n(x) \qquad N_n = \left(\sqrt{\pi}\, n!\, 2^n\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Stationäre Lsg. des Harm. Oszillator

$$\varphi(x) = N_n\, H_n(x)\, e^{-\frac{x}{2}}$$

zugehörige diskrete Energie - EWe

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Delta E = \text{const} = \hbar\omega$$

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$ Grundzustand (klassisch $E_0 = 0$)

Eigenschaften der $\varphi_n(x)$

$$\varphi_n(x) = (-1)^n \varphi_n(-x)$$

Sie haben n Nullstellen

2 HO: Algebraische Methode

$$\left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2\right] \varphi(x) = E\,\varphi(x)$$

Dimensionslos:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x \qquad \hat{p} = \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}\, p$$

Definitionen

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i$$

$$\hat{H} = \frac{1}{\hbar\omega} H = \frac{1}{2}\left(\hat{x}^2 + \hat{p}^2\right) \qquad i\ \varepsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$$

$$\hat{H}\,|\varphi_n\rangle = E\,|\varphi_n\rangle$$

und definieren neue Operatoren

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}) \quad / \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p})$$

invertieren

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+ + a) \quad / \quad \hat{p} = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^+ - a)$$

Es gilt

1) $$[a, a^+] = \frac{1}{2}[\hat{x} + i\hat{p}, \hat{x} - i\hat{p}]$$

$$= \frac{i}{2}[\hat{p}, \hat{x}] - \frac{i}{2}[\hat{x}, \hat{p}] = 1$$

2) $N = a^+ a = \frac{1}{2}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2 - 1)$

N: Besetzungszahloperator

3) $\hat{H} = a^+ a + \frac{1}{2} = N + \frac{1}{2}$

Eigenzustände von $\hat{H}$ sind auch Eigenzustände von N

$\Rightarrow$ Suche bzg.

$$N|\varphi\rangle = \underset{\text{nü}}{\nu}|\varphi\rangle$$

$$E_\nu = \left(\frac{E}{\hbar\omega}\right) = \nu + \frac{1}{2}$$

Eigenschaften von N, a, a^+

a) $[N, a] = [a^+ a, a] = a^+ \underbrace{[a, a]}_{=0} + \underbrace{[a^+, a]}_{=-1} a$

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

b) Eigenwerte $\nu \geq 0$

$$0 \leq |a|\varphi_\nu\rangle|^2 = \langle a\varphi_\nu|a|\varphi_\nu\rangle$$
$$= \langle\varphi_\nu|a^+ a|\varphi_\nu\rangle = \langle\varphi_\nu|\nu|\varphi_\nu\rangle = \nu\underbrace{\langle\varphi_\nu|\varphi_\nu\rangle}_{>0}$$

$$\Rightarrow \nu \geq 0$$

für $\nu = 0 \Rightarrow \quad a|\varphi_n\rangle = 0$

Ein Ausdruck einsetzen:

$$0 = a|\varphi_0\rangle = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x + \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega}}\, p\right]|\varphi_0\rangle = 0$$

Ergibt die stat. DGL:

$$\left[\frac{m\omega}{\hbar} x + \frac{d}{dx}\right]\varphi_0(x) = 0$$

mit Lösung

$$\varphi_0(x) = \sqrt{\frac{\pi\hbar}{\omega m}}^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right]$$

also $(\,)^{-\frac{1}{4}}$

c) Sei $|\varphi_\nu\rangle$ Eigenzustand zu N

$$N|\varphi_\nu\rangle = \nu|\varphi_\nu\rangle$$

$\Rightarrow$ $a|\varphi_\nu\rangle$ ist Eigenzustand zu $\nu - 1$

$a^+|\varphi_\nu\rangle$ ist " zu $\nu + 1$

$$Na^+|\varphi_\nu\rangle = (a^+N + a^+)|\varphi_\nu\rangle$$

$[Na^+] = a^+$ Kommutator

$$= a^+(\nu+1)|\varphi_\nu\rangle$$

$$= (\nu+1)a^+|\varphi_\nu\rangle$$

wohin geht $(a^+N)|\varphi_\nu\rangle$?

$|\varphi_\nu\rangle$ sei normiert!

$$\langle a^+\varphi_\nu | a^+\varphi_\nu\rangle = \langle\varphi_\nu | aa^+ | \varphi_\nu\rangle$$

$$= \langle\varphi_\nu | \underbrace{a^+a}_{=N} + 1 | \varphi_\nu\rangle$$

$$= (\nu+1)\langle\varphi_\nu|\varphi_\nu\rangle = \nu + 1$$

$$\Rightarrow a^+|\varphi_\nu\rangle = \sqrt{\nu+1}\,|\varphi_{\nu+1}\rangle$$

$$a|\varphi_\nu\rangle = \sqrt{\nu-1}\,|\varphi_{\nu-1}\rangle$$

durch wiederholtes anwenden von a^+ auf den Grundzustand lassen sich alle Eigenfunktionen gewinnen.

$$|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}a^+|\varphi_{n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|\varphi_0\rangle$$

Beh.: alle Eigenwerte ν von N sind $\in \mathbb{N}_0$

Sei $\tilde{\nu}$ EW mit $n < \tilde{\nu} < n+1$

$$N|\varphi_{\tilde\nu}\rangle = \tilde\nu\,|\varphi_{\tilde\nu}\rangle$$

$$N(a^n|\varphi_{\tilde\nu}\rangle) = (\tilde\nu - n)(a^n|\varphi_{\tilde\nu}\rangle)$$

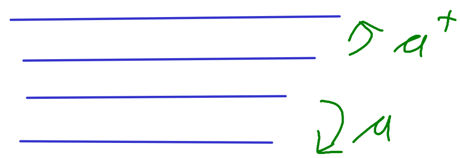
$$= N(a^{n+1}|\varphi_{\tilde\nu}\rangle) = \underbrace{(\tilde\nu - n - 1)}_{<\,0}(a^{n+1}|\varphi_{\tilde\nu}\rangle)$$

Widerspruch zu Beh.

$\Rightarrow$ alle EW sind > 0

Interpretation:

a^+ heißt Erzeugungsoperator, a heißt Vernichtungsoperator $\Big\}$ Leiteroperator



Explizite Darstellung von N, H, a^+, a, p, x in der Besetzungszahlendarstellung

$$N|n\rangle = n|n\rangle \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 2 & \\ 0 & & & 3 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right) \qquad H = \hbar\omega \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & 0 \\ & \frac{3}{2} & & \\ & & \frac{5}{2} & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$\langle m|a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\;\delta_{m(n+1)}$$

$$(a^+) = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & & & \\ & \sqrt{2} & \ddots & & \\ & & \sqrt{3} & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \qquad (a) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & & & 0 \\ & 0 & \sqrt{2} & & \\ & & 0 & \sqrt{3} & \\ & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\hat x = \frac{1}{2}(a + a^+) \qquad \hat p = \frac{1}{2}(a^+ - a)$$

$$(\hat x) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & & & \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & & \\ & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \\ & & \sqrt{3} & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \qquad (\hat p) = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1} & & & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & -\sqrt{2} & & \\ & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & \\ 0 & & \sqrt{3} & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Was hat das alles zu bedeuten?

D Diskussion der Resultate

1) Erwartungswerte

$\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$ für alle t

(Es passiert gar nix)

$\langle n | (\Delta x)^2 | n \rangle$ wächst mit n

entspricht dem Ergebnis aus der klass. Mechanik für das zeitl. Mittel.

2) Qualitative Betrachtung des Grundzustands

Klassisch: $x = 0$, $p = 0$, $E_{kin} = 0$

QM: $\langle x \rangle = 0$, $\langle p \rangle = 0$

Wellenfkt. ausgedehnt über Bereich $\sim \xi$

Potentielle Energie $\langle V \rangle \approx \frac{1}{2} m \omega^2 \xi^2$

Impuls $\langle p^2 \rangle \approx \frac{\hbar^2}{\xi^2}$

Min. Energie $\langle T \rangle \approx \frac{\hbar^2}{2m\xi^2}$

Hamilton-Operator $\langle H \rangle \approx \frac{\hbar}{2m\xi^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 \xi^2$

ist minimal für $\xi^2 = \frac{\hbar}{m\omega} \Rightarrow \langle H \rangle \approx \hbar\omega$