III Postulate der Quantenmechanik

A Allgemeine Prinzipien

Klass. System:

zur Zeit t_0 werde ein klass. Zustand festgelegt
durch die verallgemeinerten Koordinaten $q_i(t_0)$,
und Impulse $p_i(t_0)$

$\Rightarrow$ für bel. Zeit $q_i(t)$ und $p_i(t)$ über die
Hamilton-Gleichungen
$2n$ DGLen 1. Grades $\quad (i \in [1, n])$

QM

zur Zeit t_0 sei der Zustand festgelegt durch $\psi(t_0)$
$\psi \in$ Hilbertraum

Jede Messung wird beschrieben durch einen Operator A
der auf $\psi(t_0)$ wirkt
„Observable"

Messresultat liefert Eigenwert von A

Wahrscheinlichkeit den Eigenwert a_n zu finden
ist (a_n nicht entartet)

$$W(a_n) = |\langle u_n | \psi \rangle|^2$$

wobei u_n der zu a_n gehörende EV ist (Eigenzustand)

(falls a_n g-fach entartet: $W(a_n) = \sum_{i=1}^{g} |\langle u_i | \psi \rangle|^2$

für A mit kontinuierlichem Spektrum:
W sei Wahrscheinlichkeitsdichte

$$dW(\alpha) = |\langle v_\alpha | \psi \rangle|^2 \, d\alpha$$

Bsp: $dW(x) = |\langle x|\psi\rangle|^2 dx = |\psi(x)|^2 dx$

$dW(p) = |\langle p|\psi\rangle|^2 dp = |\tilde{\psi}(p)|^2 dp$

„Reduktion des Wellenpakets"

Nach der Messung mit Resultat a_n ist das System sicher im Unterraum der durch a_n festgelegt ist.

$$|\psi\rangle \xrightarrow[a_n]{} \frac{P_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_n|\psi\rangle}}$$

wobei $P_n = |u_n\rangle\langle u_n|$ der Projektor auf Eigenzustand mit EW a_n ist

$$= \frac{|u_n\rangle\langle u_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|u_n\rangle\langle u_n|\psi\rangle}}$$

(offensichtlich auf 1 normiert)

Jede weitere Messung mit A unmittelbar darauf ändert den Zustand nicht mehr und liefert das gleiche Resultat.

Zeitentwicklung

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$$

Schrödinger-Gl

qmechanische Observablen werden aus klassischen Größen gewonnen

$x \longrightarrow X$

$p \longrightarrow P = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$

alle anderen Observablen, die klassisch Funktionen von x und p sind, werden durch diese Substitution gewonnen. "Korrespondenzprinzip"

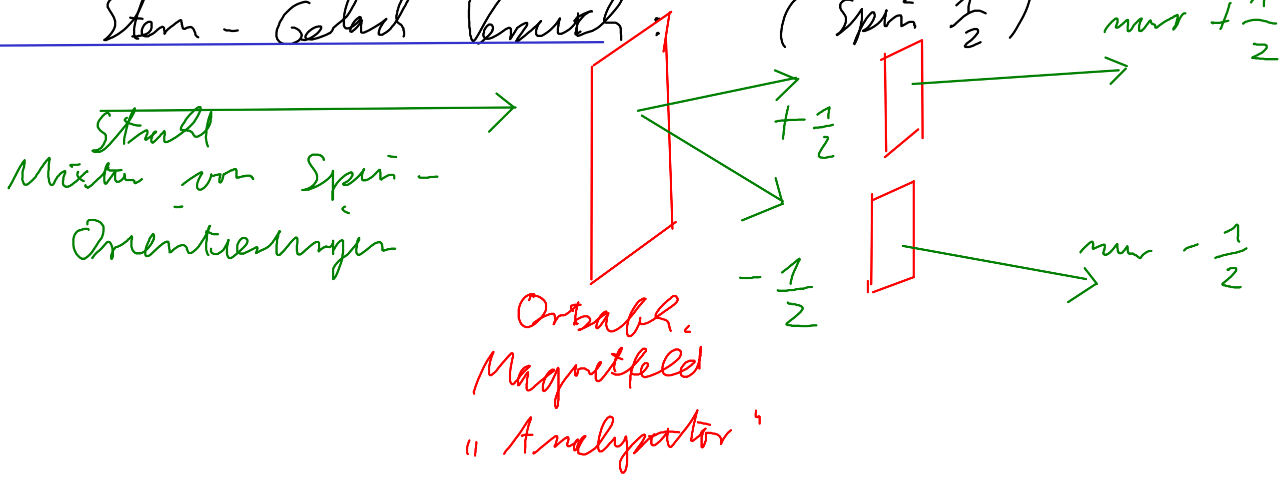
Bsp. Drehimpuls, Hamilton Op. aus Hamiltonfkt.

Es gibt aber auch Observable, die keine klass. Analogien haben.

Bsp. Spin

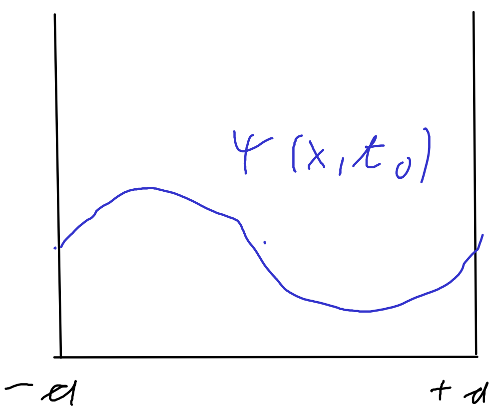
Beispiele zur Reduktion von Wellenpaketen:

Stern-Gerlach Versuch: (Spin $\frac{1}{2}$)



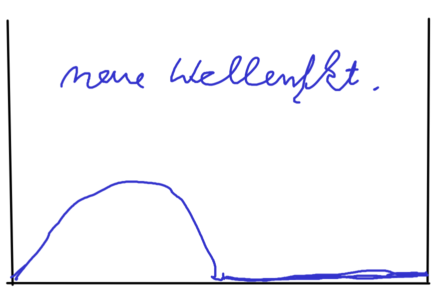
Ortsmessung: Teilchen zw. ∞ hohen Wänden

Ausgangszustand: 1. angeregter Zustand



Messung liefert:
Teilchen ist nicht im Intervall $[0, a]$

Wellenfkt. nach Messung
im Intervall $-a, 0$ ungestört,
im Intervall $0, a$ auf null



wieder auf 1 normiert
$\Rightarrow \cdot \sqrt{2}$

Anmerkung:

Sukzessive Messung von Observablen aus einem Satz kommutierender Observablen führt auf einen Zustand, der Eigenzustand von allen Operatoren ist. Der Zustand ist dann durch die Eigenwerte eindeutig festgelegt.

Erwartungswerte (diskretes, nicht entartetes Spektrum)

einzelne Messung liefert einen der Eigenwerte mit Wahrscheinlichkeit $W_n = |\langle u_n|\psi\rangle|^2$

Viele Messungen als Mittelwert:

$$\sum_n a_n W_n = \sum_n \langle\psi|n\rangle a_n \langle n|\psi\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

$= u_n$

Mittelwert selbst muss nicht messbar sein

Schwankungen um den Mittelwert

$$\langle\psi|(\Delta A)^2|\psi\rangle = \langle\psi|(A - \langle\psi|A|\psi\rangle)^2|\psi\rangle$$
$$= \langle\psi|A^2|\psi\rangle - \langle\psi|A|\psi\rangle^2$$

Heisenbergsche Unschärferelation

Es gelte $[Q, P] = i\hbar$

Betrachte: $|\varphi\rangle = (Q + i\lambda P)|\psi\rangle$

$$0 \leq \langle\varphi|\varphi\rangle = \langle\psi|(Q - i\lambda P)(Q + i\lambda P)|\psi\rangle$$

$$Q^2 + \lambda^2 P^2 + i\lambda QP - i\lambda PQ$$
$$i\lambda [Q P]$$
$$i\hbar$$

$$= \langle Q^2\rangle_\psi + \lambda^2 \langle P^2\rangle_\psi - \lambda\hbar \geq 0 \quad \text{für alle } \lambda$$

wähle $\lambda = \dfrac{\hbar}{2\langle P^2\rangle_\psi}$

$$\Rightarrow \quad \langle Q^2 \rangle_\psi \langle P^2 \rangle_\psi \geq \frac{\hbar^2}{4}$$