IV Harmon. Oszillator

Wiederholung

analyt. Methode

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \qquad \hat{x} = x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,, \quad \varepsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{d\hat{x}^2} - \hat{x}^2 + 2\varepsilon\right)\varphi(\hat{x}) = 0$$

$\Rightarrow$ Eigenfkt. $\varphi_n(\hat{x}) = N_n e^{-\frac{\hat{x}^2}{2}} H_n(\hat{x})$

Hermite-Polynome

$$H_n(\hat{x}) = (-1)^n e^{+\hat{x}^2} \frac{d^n}{d\hat{x}^n} e^{-\hat{x}^2}$$

$$N_n = \left(\sqrt{\pi}\, n!\, 2^n \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{\ldots}}$$

Algebraische Methode

$$\hat{x} = \ldots\,, \quad \hat{p} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\, p\,, \quad [\hat{x},\hat{p}] = i$$

$$\hat{H} = \frac{H}{\hbar\omega} = \frac{1}{2}\left(\hat{x}^2 + \hat{p}^2\right)$$

$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{p})$ Vernichter

$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p})$ Erzeuger

$$[a, a^+] = 1$$

Besetzungszahloperator

$$N = \frac{1}{2}\left(\hat{x}^2 + \hat{p}^2 - 1\right)$$

Für $|\varphi_0\rangle$: Grundzustand

$$a|\varphi_0\rangle = 0$$

Zusammenhang mit Ortsdarstellung:

$$0 = a|\varphi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x + \frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right]|\varphi_0\rangle$$

Ortsdarst. $\Rightarrow \left(\frac{m\omega}{\hbar} x + \frac{d}{dx}\right) \langle x | \varphi_0 \rangle = 0$

Lsg. $\langle x | \varphi_0 \rangle = \left(\frac{\pi \hbar}{\omega m}\right)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2\right)$

$$|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n |\varphi_0\rangle$$

E) Dreidimensionale Harm. Oszillator in kartesischen Koordinaten

$$\left[\frac{\vec{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{R}^2\right] \varphi(\vec{R}) = E \varphi(\vec{R})$$

(Zeitabh. SGL $\Rightarrow$ Stationäre SGL
$\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}) \cdot a(t)$, $a = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$)

$$\vec{P}^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 \quad ; \quad \vec{R}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$\Rightarrow H = H_x + H_y + H_z$ mit $H_x = -\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

Es gilt $[H_x, H_y] = 0$ $[H_x, H_z] = 0$ usw

H_x, H_y, H_z können gleichzeitig diag. werden

$\Rightarrow$ 3 ungekoppelte harm. Oszillatoren

Ansatz: Separation der Variablen (da Op. zerlegbar)

$$\varphi(\vec{R}) = \varphi_x(x)\, \varphi_y(y)\, \varphi_z(z)$$

$$H \varphi(\vec{R}) = (H_x + H_y + H_z)(\varphi_x(x)\, \varphi_y(y)\, \varphi_z(z)) \quad \Big| \cdot \frac{1}{\varphi_x \varphi_y \varphi_z}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\varphi_x} H \varphi_x}_{:= E_x} + \underbrace{\frac{1}{\varphi_y} H_y \varphi_y}_{:= E_y} + \underbrace{\frac{1}{\varphi_z} H_z \varphi_z}_{:= E_z} = E$$

$(H\varphi = E\varphi)$

$\Rightarrow \quad E_x + E_y + E_z = E$

und
$$\left.\begin{aligned} H_x \varphi_x &= E_x \varphi_x \\ H_y \varphi_y &= E_y \varphi_y \\ H_z \varphi_z &= E_z \varphi_z \end{aligned}\right\} \text{ 3. 1dim. Oszillator}$$

bzg ist $H_x \varphi_{n_x}(x) = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})\varphi_{n_x}(x)$

φ_{n_x} bzg der eindim. SGL mit Energie $E_{n_x} = \hbar\omega(n_x+\frac{1}{2})$

$$E = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2})$$

$E = \hbar\omega\frac{3}{2}$ Grundzustand eindeutig

$E = \hbar\omega(1+\frac{3}{2})$ 1. angeregter Zustand
3 fach entartet

$E = \hbar\omega(2+\frac{3}{2})$ 2. angeregter Zustand
6 fach entartet

Grad der Entartung?

Wieviele Kombinationen von n_1, n_2, n_3 gibt es
für $n = n_1 + n_2 + n_3$

Gegeben sei n:

Wähle $n_x \in \{0, 1, \dots, n\}$

dann $n_y + n_z = n - n_x$

$\{n_y, n_z\} = \{0, n-n_x\}$ oder $\{1, n-n_x-1\}$ ... $\{n-n_x, 0\}$

das sind $n - n_x + 1$ Möglichkeiten für festes n_x

Also insgesamt $\sum_{n_x=0}^{n}(n-n_x+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Möglichkeiten

7 Kohärente Zustände – quasiklassische Zustände

$\langle n | X | n \rangle = 0 \qquad \forall t$, zeitlich konstant

Wie kann man Zustände konstruieren, die einen klassischen Grenzfall haben?

Überlagerung von $|n\rangle$

Zu Zeit $t=0$ sei φ ein Eigenzustand zum Vernichtungsoperator a

$$a|\varphi_\alpha\rangle = \alpha|\varphi_\alpha\rangle$$

Vernicht.

entwickle $|\varphi_\alpha\rangle$ nach $|n\rangle = \frac{a^{+n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$

$$|\varphi_\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$$

$$\Rightarrow \quad c_n = \langle n|\varphi_\alpha\rangle = \langle 0|\frac{a^n}{\sqrt{n!}}|\varphi_\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\varphi_\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_\alpha = \sum_n c_n |0\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0 |n\rangle$$

Normierung: $\quad 1 = \langle\varphi_\alpha|\varphi_\alpha\rangle = \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{\sqrt{n!}}|c_0|^2 = e^{|\alpha|^2}$

$$\Rightarrow \quad c_0 = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$$

$$|\varphi_\alpha\rangle = c_0 \sum_n \frac{(\alpha a^+)^n}{n!}|0\rangle = c_0 e^{\alpha a^+}|0\rangle$$

Zeitentwicklung

$$|\varphi_\alpha\rangle = |\varphi_\alpha(t=0)\rangle$$

$$|n,t\rangle = \exp(-i\omega\underbrace{(n+\tfrac{1}{2})}_{\text{Energie}}t)\,|n,0\rangle$$

$$c_n(t) = c_n(0)\exp(-i\omega(n+\tfrac{1}{2})t)$$

$$|\varphi_\alpha(t)\rangle = c_0 e^{-i\omega\frac{t}{2}} \sum_n \frac{(\alpha a^+ e^{-i\omega t})^n}{n!}|0\rangle$$

$$\alpha(t) = \alpha \, e^{-i\omega t}$$

$$|\varphi_\alpha(t)\rangle = |\varphi_{\alpha(t)}\rangle \, e^{-i\frac{\omega}{2}t}$$

D.h. $\varphi_\alpha(t)$ ist und bleibt Eigenzustand zu a mit Eigenwert $\alpha(t)$

φ ist Gaußpaket im Ortsraum, das im Potential hin und her oszilliert.