Wiederholung

F "Quasi-klassische Zustände" $a|\varphi_\alpha\rangle = \alpha|\varphi_\alpha\rangle$

$$|\varphi_\alpha\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} c_0 |n\rangle \quad ; \quad c_0 = e^{-\frac{|\alpha^2|}{2}}$$

Wahrscheinlichkeit, den Zustand n zu finden:

$$|\langle n|\varphi_\alpha\rangle|^2 = \frac{(\alpha^2)^n}{n!} e^{-|\alpha^2|}$$

Zeitentwicklung

$$|\varphi_\alpha(t)\rangle = |\varphi_{\alpha(t)}\rangle e^{-i\omega\frac{t}{2}}$$

mit $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega m}} \frac{(a + a^+)}{\sqrt{2}}$$

$$\langle\varphi_\alpha(t)|x|\varphi_\alpha(t)\rangle = x_0\sqrt{2}\,|\alpha| \cos(\omega t - \delta)$$

mit $\alpha(t=0) = |\alpha| e^{i\delta}$

... (längere Rechnung)

$$|\langle x|\varphi_\alpha(t)\rangle|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x_0} \exp\left(-\frac{(x-x_0)\sqrt{2}|\alpha|}{x_0^2} \cos(\omega t - \delta)^2\right)$$

Breite x_0

Für $\alpha \gg 1 \Rightarrow$ klassisches Verhalten

G Der harmonische Oszillator mit Ladung im konstanten el. Feld

Ohne Feld: $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

zusätzliche Pot. $W(x) = -q \varepsilon x$ (also $E_x = \varepsilon q$)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - q \varepsilon x$$

Schröd. Gl (SGL)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 \left(x - \frac{q \varepsilon}{m \omega^2} \right)^2 - \frac{q \varepsilon^2}{2 m \omega^2} \right] \hat{\varphi}(x) = \hat{E} \, \hat{\varphi}(x)$$

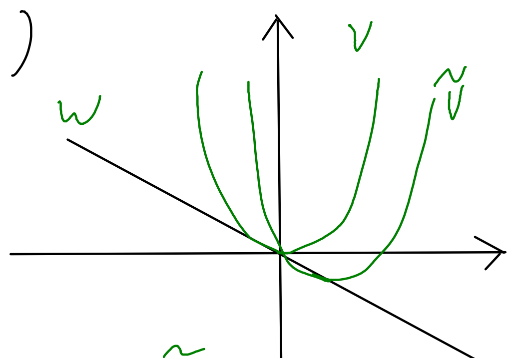
def $\quad u = x - \frac{q \varepsilon}{m \omega^2} \qquad \varphi(u) = \hat{\varphi}(x) \qquad E = \hat{E} + \frac{q^2 \varepsilon^2}{2 m \omega^2}$

$$\left[-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m \omega^2}{2} u^2 \right] \varphi(u) = E \, \varphi(u)$$

$\Rightarrow$ wie vorher $\quad \hat{E} = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{q^2 \varepsilon^2}{2 m \omega}$

$\varphi_n(u)$ = harm. oszill. Fkt.

$\hat{\varphi}(x) = \varphi_n \left(x - \frac{q \varepsilon}{m \omega^2} \right)$



$\tilde{V} = V + W$

V Zwei-Zustandsysteme

Beispiele Spin $\frac{1}{2}$ im Magnetfeld (Lamor-Präzession

2 dicht benachbarte Niveaus in Atomphysik

Elementarteilchenphysik $K_0 - \bar{K}_0$ – System

Neutrino-Oszillation

A Spin $\frac{1}{2}$

1 Magnet. Moment (klass. Behandlung)

i) Kraft auf Dipol $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\mathfrak{m}}\,\vec{B})$ $\vec{M}$

$\mathfrak{m}$ großes altes deutsches M

keine Kraft im homogenen Feld

ii) Drehmoment $\vec{\Gamma} = \vec{M} \times \vec{B}$

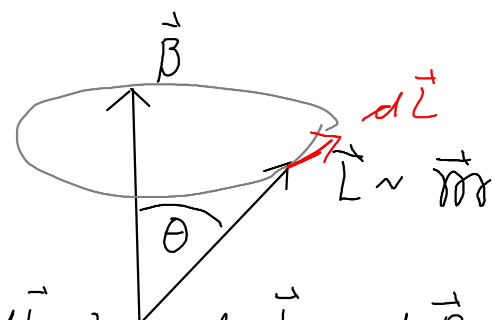
$\vec{M} = \gamma\,\vec{L}$

gyromagnetisches Verhältnis

Bewegungsgleichung für Drehimpuls

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \gamma\,\vec{L} \times \vec{B}$$



$d\vec{L}$ ⊥ auf $\vec{L}$ und $\vec{B}$

Präzession von $\vec{L}$ bzw $\vec{M}$ um $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$

$$\vec{L}(t) = \ell_0 \begin{pmatrix} \sin\Theta \cos(\varphi + \omega t) \\ \sin\Theta \sin(\varphi + \omega t) \\ \cos\Theta \end{pmatrix}$$

2 QM für Spin $\frac{1}{2}$ Systeme

Postulat $\vec{L} \longrightarrow \hat{\vec{S}} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix}$

mit S_x, S_y, S_z Operatoren

2 Zustände (Raum zweidimensional)

Konvention: Basis sei so, dass S_z diagonal

$$S_z|+\rangle = +\frac{\hbar}{2}|+\rangle, \quad S_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle$$

$$\underset{\sigma_x}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{\sigma_y}{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{\sigma_z}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \quad \underset{\mathbb{1}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Pauli-Spin-Matrizen

$$S_{x,y,z} = \frac{\hbar}{2}\sigma_{x,y,z} \qquad \underset{|+\rangle}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad \underset{|-\rangle}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$[S_x, S_y] = i S_z$$

allg. Zustand

$$|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle \qquad \text{mit } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Frage: Gibt es eine Linearkombination von S_x, S_y, S_z mit reellen Koeff. $\left(\sum_{i=x,y,z} u_i S_i\right) = \vec{S}\vec{u}$, so dass $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand ist?

Ja, per Konstruktion.

Ansatz: $\vec{u} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\vec{S}\vec{u} = \frac{\hbar}{2}\left[\sin\theta\cos\varphi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + \cos\theta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(\begin{array}{c|c} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \hline \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{array}\right)$$

Zugehörige Eigenzustände

zu EW $+\frac{\hbar}{2}$

$$|1\rangle_u = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} |+\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} |-\rangle$$

zu EW $-\frac{\hbar}{2}$

$$|2\rangle_u = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} |+\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} |-\rangle$$

Wähle $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = |\alpha|$, $0 < \theta < \pi$

$$\theta = 2 \arccos |\alpha| \quad , \quad \varphi = (\varphi_\beta - \varphi_\alpha)$$

wobei $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi_\alpha}$

$\beta = |\beta| e^{i\varphi_\beta}$

$$\chi = \varphi_\alpha + \varphi_\beta$$

$$|\psi\rangle = e^{i\chi} |1\rangle_u$$