2) Eigenwerte zu J^2 und J_z:

a) Es gilt $-j \le m \le j$

Beweis: $|J_\pm |j,m\rangle|^2 \ge 0 \iff \langle j,m|J_+J_-|j,m\rangle \ge 0$

$\Rightarrow j(j+1) - m^2 + m \ge 0 \quad (\S)$

5

$\langle j,m|J_-J_+|j,m\rangle \ge 0 \Rightarrow j(j+1)-m^2-m \ge 0 \quad (\S\S)$

$(\S\S) \Rightarrow (j-m)(j+m+1) \ge 0 \Rightarrow \boxed{m\le j}$ 6

$(\S) \Rightarrow (j+m)(j-m+1)\ge 0 \Rightarrow \boxed{m \ge -j}$

b)
- $J_-|j,m\rangle = 0$ falls $m=-j$ folgt aus $(\S)$
- $J_+|j,m\rangle=0$ falls $m=+j$
- falls $J_z|j,m\rangle = m\hbar|j,m\rangle$; $m>-j$

dann ist $J_-|j,m\rangle$ Eigenzustand zu J_z mit Eigenwert $\hbar(m-1)\hbar$

und der Zustand $J_-|j,m\rangle \neq 0$ wegen $(\S)$

Beweis: $J_z(J_-|j,m\rangle) \overset{2}{=} J_- \underbrace{J_z}_{m\hbar}|j,m\rangle - \hbar J_-|j,m\rangle$

$= (m-1)\hbar(J_-|j,m\rangle)$

entsprechend $J_z(J_+|j,m\rangle) = (m+1)\hbar(J_+|j,m\rangle)$

falls $m<j$

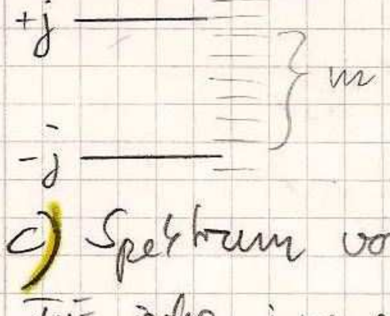
J_+, J_- sind auf- bzw absteigende Operatoren bezüglich m

(j bleibt ungeändert, da $[J^2, J_\pm]=0$)

Zwischenbilanz: $j(j+1)\ge 0$, $|m|\le j$

$J_\pm$ auf- und Abstiegsoperatoren, $J_+|j,m=j\rangle=0$, $J_-|j,m=-j\rangle=0$

Mögliche m-Werte



c) Spektrum von J_z

Für jedes j,m gibt es eine nicht negative ganze Zahl p,

sodass $-j \le m-p < -j+1$ mit $m \ge -j$

p ist die größte ganze Zahl die man von m abziehen darf sodass $m-p$ noch im erlaubten Bereich liegt.

$$\boxed{\begin{array}{lll} |j,m\rangle & \text{Eigenvektor zu } J_z \text{ mit E.W.} & m \\ J_-|j,m\rangle & \quad -''- & m-1 \\ (J_-)^p|j,m\rangle & \quad -''- & m-p \end{array}}$$

Norm $\neq 0$ wegen Gl. (5), iterativ angewendet

Betrachte $J_-(J_-)^p|j,m\rangle$

Falls $(m-p) > -j$, so wäre der Eigenwert von $(J_-)^{p+1}|j,m\rangle$ gleich $(m-p-1)$ und somit $< -j$. dies ist im Widerspruch zu

$-j \leq m \quad \Rightarrow \quad (\;)^{p+1}|j,m\rangle = 0, \Rightarrow -j = m-p$

entsprechendes gilt für $J_+ \qquad \Rightarrow +j = m+q$ $\Big\}$ p,q ganzzahlig

$\boxed{2j = p+q}$ ganzzahlig, positiv

$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots \qquad |m| \leq j \Rightarrow 2j+1$ erlaubte Werte von m

3) Konstruieren einer Basis und der zugehörigen Operatoren zu festem j

$(2j+1)$ dim. Raum:

$|j,m\rangle$ mit $m = +j$ sei normiert.

iterativ: $\quad |j,m-1\rangle = \dfrac{1}{\hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}} J_-|j,m\rangle$

$|j,m-1\rangle$ ist normiert wegen 4

$|j,m\rangle$ und $|j,m'\rangle$ sind orthogonal für $m' \neq m$, da

$\langle j,m-1|J_z = \hbar(m-1)\langle j,m-1|, \quad J_z|j,m\rangle = m\hbar|j,m\rangle$

$\langle j,m-1|J_z|j,m\rangle = 0$

In dieser Basis gilt:

$\langle j,m|J_z|j,m'\rangle = m\hbar\,\delta_{mm'}$

$\langle j,m|J_+|j,m'\rangle = \sqrt{j(j+1)-m'(m'+1)}\;\hbar\,\delta_{m\,m'+1}$

$\langle j,m|J_-|j,m'\rangle = \sqrt{j(j+1)-m'(m'-1)}\;\hbar\,\delta_{m\,m'-1}$

4) Beispiele

a) $j=0, \quad m=0$; Nur ein Zustand

b) $j=\frac{1}{2}$; $m = \pm\frac{1}{2}$; $J_z = \hbar\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} \to m' \\ \downarrow m \end{array}$

$\langle m|J_+|m'\rangle \neq 0$ ($m=\frac{1}{2}$, $m'=-\frac{1}{2}$ für diese) sonst $=0$

$\langle m | J_+ | m' \rangle = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(+\frac{1}{2}\right)} = 1$

$\langle j, \frac{1}{2} | J_+ | j, -\frac{1}{2} \rangle = \hbar \qquad J_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

entsprechend $J_- = (J_+)^\dagger = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$J_x = (J_+ + J_-)\frac{1}{2} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$J_y = (J_+ - J_-)\frac{1}{2i} = \frac{\hbar}{2i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

c) $j = 1$, $m = 1, 0, -1$

$$\begin{array}{cc} & \xrightarrow{m'} \\ J_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \downarrow m \end{array}$$

$J_+ \neq 0$ für $(m=0, m'=1)$ und $(m=1, m'=0)$

$J_+ (m=0; m'=-1) : \sqrt{2-0}$

$J_+ (m=1; m'=0) : \sqrt{2-0}$

$J_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

$J_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_y =$

d) $j = \frac{3}{2}$

C) Bahndrehimpuls in Polarkoordinaten (Kugelkoord.)

Ausgangspunkt: $L_x = \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), L_y, L_z$

$$\left.\begin{array}{l} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} L_\pm = \hbar e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} \end{array}$$

$L^2 = \hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$

L_z und φ sind kanonisch konjugiert

Wir suchen Fkt $Y_m^l(\theta, \varphi)$ sodass:

$L^2 Y_m^l = \hbar^2 l(l+1) Y_m^l$

$L_z Y_m^l = \hbar m Y_m^l$