2) Zeitabh. Beschreibung (+ große Abstände vom Streuzentrum)

einlaufende Welle:

$$\phi_{\vec{k}_0}(r,t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{-i\vec{k}\vec{r} - i\frac{E_k}{\hbar}t}\, A_{\vec{k}_0}(\vec{k})$$

Richtung $\frac{\vec{k}_0}{|\vec{k}_0|} \hat{=} \vec{e}_z$

gestreute Welle:

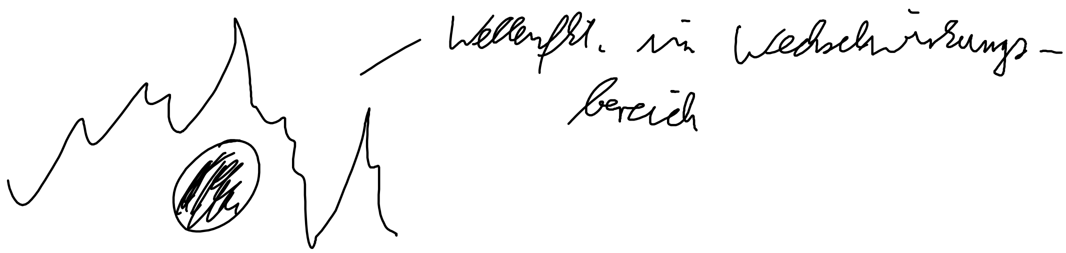
$$\psi^s(\vec{r},t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}}\, \frac{e^{ikr}}{r}\, e^{i\frac{E(k)}{\hbar}t}\, A_{\vec{k}_0}\, F(\vec{k},\hat{r})$$

$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ Einheitsvekt. in Beobacht.-Richt.

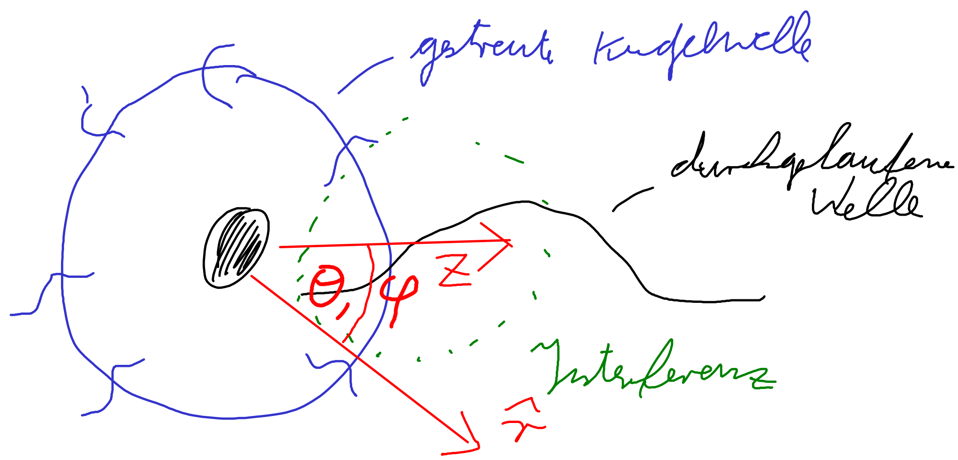
$$\approx \underbrace{\frac{F(\vec{k}_0,\hat{r})}{r}}_{\frac{f(\theta,\varphi)}{r}} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{ikr}\, e^{-i\frac{E(k)}{\hbar}t}\, A_{k_0}(\vec{k})$$

$t \ll 0$

$t \approx 0$



$t \gg 0$



gestreute Welle $|\vec{x}|, t$ Abhängig wie ϕ_{k_0},
aber mit $\frac{f(\theta,\varphi)}{r}$ multipliziert

insgesamt für große Abstände:

$$\psi(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} A_{\vec{k}_0}(\vec{k})\, e^{-i\frac{E(k)}{\hbar}t}\left[e^{i\vec{k}\vec{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} f_k(\theta,\varphi)\right]$$

Beträge

Streuamplitude

- hier nur elastische Streuung!
- für $t \to -\infty$ verschwindet die gestreute Welle!

3) Stationäre Behandlung

Einlaufende ebene Welle: $N e^{i\vec{k}\vec{r}} = \phi_{\vec{k}}(\vec{r})$

gestreute " " : $N \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta,\varphi) = \psi^s_{\vec{k}}(\vec{r})$

(Normierung: $\int d\vec{r}\; \phi^*_{\vec{k}}(\vec{r})\, \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}) = \delta(\vec{k}-\vec{k}')$)

$N = (2\pi)^{-3/2}$

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = N\left(e^{i\vec{k}\vec{r}} + f(\theta,\varphi)\frac{e^{ikr}}{r}\right)$$

f hat Dimension Länge

4) Stromdichte und Streuquerschnitt

$$\vec{j} = \frac{1}{2m}\left(\psi^* \frac{\hbar\vec{\nabla}}{i}\psi + c.c\right)$$

komplex konj.

Beitrag der einlaufenden Welle:

$$\vec{j}_e = N^2 \frac{\hbar\vec{k}}{m}$$

einlaufend

Beitrag der gestreuten Welle

$$\vec{j}_s = \frac{N^2}{m} \mathrm{Re}\left[\left(\frac{e^{-ikr}}{r} f(\theta,\varphi)\right) \frac{\hbar \vec{\nabla}}{i}\left(\frac{e^{ikr}}{r} f(\theta,\varphi)\right)\right]$$

streu /

NR $\quad \vec{\nabla}\left(\frac{e^{ikr}}{r} f\right) = \left(\nabla \frac{e^{ikr}}{r}\right) f + \underline{\frac{e^{ikr}}{r}}(\nabla f)$

Erinnerung $\quad \vec{\nabla} = \vec{e}_r \partial_r + \underbrace{\vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\varphi + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta}_{\text{Zusätzlich unterdrückt}}$

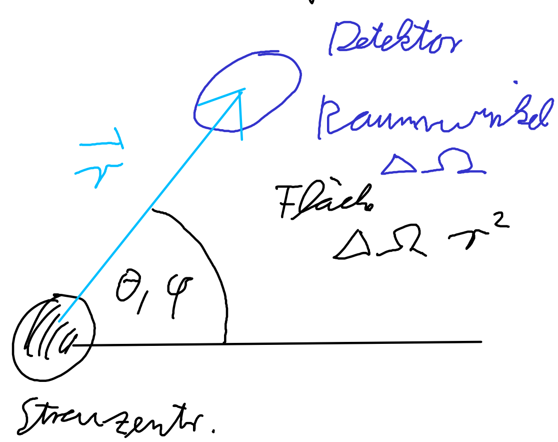
$\frac{1}{r^3}$ verschwindet

$$\partial_r \frac{e^{ikr}}{r} = ik \frac{e^{ikr}}{r} - \underline{\frac{e^{ikr}}{r^2}}$$ zusätzlich unterdrückt

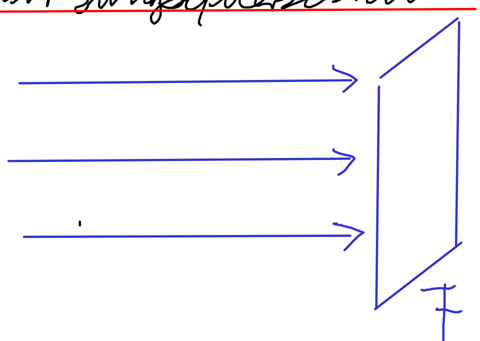
$$\Rightarrow \boxed{\vec{j}_s = \frac{N^2}{m} \frac{\hbar k}{r^2} |f(\theta,\varphi)|^2 \vec{e}_r}$$

Wahrscheinlichkeitsstrom in $\vec{e}_r$-Richtung

$$\vec{j}_s = |\vec{j}_e| \frac{|f|^2}{r^2} \vec{e}_r$$



Def. Wirkungsquerschnitt.



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Zahl der Beob. Teilchen}}{\text{Raumwinkel Detektor } \Delta\Omega \cdot \text{Zeit } \Delta t} \qquad \frac{\text{Fläche } F \cdot \text{Zeit}}{\text{Einlaufende Teilchen } N}$$

Normierung auf einlaufende Teilchen

$$\approx \frac{j_s(\theta,\varphi) \cdot \cancel{\Delta\Omega}\, r^2}{\cancel{\Delta\Omega}} \cdot \frac{1}{j_e} = |f(\theta,\varphi)|^2$$

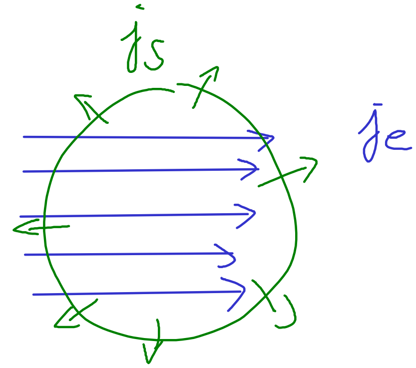
Dimension Fläche

$$\int d\Omega \, \frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{tot}$$ Der totale Wirkungsquerschnitt

Im Exp. ist $|j_e|$ = Luminosität $[cm^{-2} s^{-1}]$
„Leuchtstromdichte"

5 Optisches Theorem

$$\vec{j}_e = N^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}$$ zeitl. konstant



$$\vec{j}_s = N^2 \frac{\hbar |\vec{k}| \vec{e}_r}{m} \frac{|f(\theta,\varphi)|^2}{r}$$

Stromerhaltung?

Strom durch Fläche F nach außen

$$\int_F d\vec{F} \, j_e = 0$$ so viel rein wie raus

wo kommen die Teilchen her?

$$\int_F d\vec{F} \, j_s = N^2 \frac{\hbar |\vec{k}|}{m} \int_F d\vec{F} \, \vec{e}_r \frac{|f(\theta,\varphi)|^2}{r^2} = |j_e| \, \sigma_{Tot}$$

Kompensation durch Interferenz zw. ϕ_k und ψ_k^s

$$\vec{j}_{inter.} = \frac{\hbar}{2m}\left[\left(\phi_k^*(\vec{r}) \frac{\vec{\nabla}}{i} \psi_k(\vec{r}) + \psi_k^* \frac{\vec{\nabla}}{i} \phi_k\right) + c.c.\right]$$

komplex konjugiert

$$(\phi^* + \psi^*) \vec{\nabla} (\phi + \psi) + c.c.$$
$$= \phi^* \vec{\nabla} \psi + \psi^* \nabla \phi + c.c.$$

j_{int} liefert einen neg. Beitrag in Vorwärtsrichtung $(\theta = 0)$
Wir sind also am radialen Anteil ($\sim \vec{e}_r$ bei $\theta = 0$ interessiert :)

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \partial_r + \dots$$

$$\vec{\nabla} \psi = \vec{e}_r N f(\theta,\varphi) \left(\frac{ik}{r} - \underbrace{\frac{1}{r^2}}_{\text{unterdrückt}}\right) e^{ikr}$$

$$\vec{\nabla} \phi_k = i \vec{k} N e^{i \vec{k} \vec{r}}$$

radialer Anteil

$$\vec{e}_r \vec{j}_{int} = \frac{N^2\hbar}{2m}\Big[\Big(e^{-i\vec{k}\vec{r}}\,\frac{ik}{ir} f(\theta,\varphi) e^{ikr}$$

$$+ \frac{e^{-ikr}}{r} f^*(\theta,\varphi)\,\frac{i\vec{e}_r\vec{k}}{i}\, e^{i\vec{k}\vec{r}} \quad + c.c.\Big]$$

$$= \frac{N^2\hbar k}{2mr}\Big[e^{-i\vec{k}\vec{r}+ikr} f(\theta,\varphi) + c.c.$$

$$+ e^{i\vec{k}\vec{r}-ikr} f^*(\theta,\varphi)\cos\theta + c.c.\Big]$$

fällt ab wie $\sim \frac{1}{r}$

$$= \frac{N^2\hbar k}{2mr}\Big[e^{ikr(1-\cos\theta)} f(\theta,\varphi)(1+\cos\theta) + c.c.\Big]$$

Für $\cos\theta \neq 1$ liefert der Phasenfaktor nach Faltung mit Wellenpaket $(A(k))$ null.

Beitrag kommt nur vom Bereich $1 \geq \cos\theta \geq 1-\varepsilon$

$$\varepsilon \sim \frac{1}{kr} \ll 1$$

$$\int_F d\vec{F}\,\vec{j}_{inter} = \int d\Omega\, r^2 \vec{j}_{inter}$$

$$= \frac{N^2\hbar k}{2mr} r^2 2\pi \int_{-1}^{1} d\cos\theta \Big[e^{ikr(1-\cos\theta)} f(\theta,\varphi)(1+\cos\theta) + c.c.\Big]$$

$$= \frac{N^2\pi\hbar k r}{m}\int_0^{\varepsilon} dx \Big[e^{ikrx}(2-x) f(\theta=0,\varphi) + c.c.\Big]$$

$$\Big[-\frac{1}{ikr} 2 f(\theta=0) + c.c.\Big]$$

der Term $e^{ikr\varepsilon}$ liefert null, wenn $r\longrightarrow\infty$
nach Faltung

$$= -\frac{N^2 4\pi}{m}\hbar\, \mathrm{Im}(f(\theta=0)) = -4\pi\, |j_e|\, \frac{\mathrm{Im}(f(\theta=0))}{k}$$

Stromerhaltung:

$$|j_e|\,\sigma_{tot} - |j_e|\,\frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\big(f(\theta=0)\big) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\big(f(\theta=0)\big)}$$