Klausur am Di. im Dezember

QM-System $\leftrightarrow$ H

Zustand: Vektor im Hilbertraum $(H \in \mathcal{H})$

bzw. Wellenfkt. aus $\mathcal{F}$

$$\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle$$

lineare Operatoren A

$$A|\psi\rangle = |\psi'\rangle \in \mathcal{H}$$

hermitesch adjungierter Op. A^+ $\quad \langle \psi' | = \langle \psi | A^+$

$$\langle \varphi | A^+ | \psi \rangle = \langle \psi | A | \varphi \rangle$$

Hermitesche Operatoren

$$A^+ = A$$

1.2.3 Darstellung in Basis

$|u_i\rangle$ vollst. Orthonormiert

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |u_i\rangle \qquad |\varphi\rangle = \sum_i b_i |u_i\rangle$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \langle \varphi | = \sum_i \langle u_i | b_i^* \quad \hookrightarrow (b_1^*, b_2^*, b_3^*, \dots)$$

Skalarprodukt $\quad \langle \varphi | \psi \rangle = \sum_i \langle \varphi | u_i \rangle \langle u_i | \psi \rangle$

$$= \sum_i b_i^* c_i \mathrel{\hat{=}} (\dots)\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$$

lin. Operatoren

$$\langle \varphi | A | \psi \rangle = \sum_{ij} \langle \varphi | u_i \rangle \underbrace{\langle u_i | A | u_j \rangle}_{A_{ij}} \langle u_j | \psi \rangle$$

$$= \sum_{ij} b_i^* A_{ij} c_j$$

Op $\longrightarrow$ Matrix

Hermitesch adjungiert: A^+

$$(A^+)_{ij} = \langle u_i | A^+ | u_j \rangle = \langle u_j | A | u_i \rangle^* = A_{ji}^*$$

(was ist adjungiert?)

Herm. Operator $A^+ = A$ $\rightarrow$ A_{ii} reell

$$A_{ij} = A_{ji}^*$$

1.2.4 Basiswechsel durch unitäre Transf.

Statt Basis $\{|u_i\rangle\}$ wählen wir die Basis $\{|v_i\rangle\}$

Def. Transformationsmatrix

$$U_{ik} := \langle u_i | v_k \rangle$$

$\boxed{\text{DEF}}$

$\Rightarrow$ U ist unitär $U^+ U = \mathbb{1} = U U^+$

bzw $U^+ = U^{-1}$

mit $U_{ik}^* = \langle u_i | v_k \rangle^* = \langle v_k | u_i \rangle$

Bew $(U^+ U)_{kl} = \sum_i U_{ki}^+ U_{il}$

$$= \sum_i \langle v_k | u_i \rangle \langle u_i | v_l \rangle = \langle v_k | v_l \rangle = \delta_{kl}$$

Basiswechsel

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |u_i\rangle$$

$$|\psi\rangle = \sum_k \tilde{c}_k |v_k\rangle$$

$$\tilde{c}_k = \langle v_k | \psi \rangle = \sum_i \langle v_k | u_i \rangle \langle u_i | \psi \rangle$$

$$= \sum_i U_{ki}^+ c_i$$

analog $c_i = \sum_k U_{ik} \tilde{c}_k$

Matrixelemente

$$\tilde{A}_{kl} = \langle v_k | A | v_l \rangle$$

$$= \sum_{ij} \langle v_k | u_i \rangle \langle u_i | A | u_j \rangle \langle u_j | v_l \rangle$$

$$= \sum_{ij} U_{ki}^+ A_{ij} U_{jl}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{A} = U^+ A U$$

1.2.5 Eigenwertprobleme

Ein linearer Operator hat Eigenvektoren und Eigenwerte.

$$A|\psi_n\rangle = \lambda_n \psi_n \qquad (\psi_n \text{ Eigenvektor, } \lambda_n \text{ EW})$$

- mit $|\psi_n\rangle$ ist auch $\alpha|\psi_n\rangle$ ein Eigenvektor.
  Normierung legt $|\alpha|$ fest, aber Phase Θ ist beliebig.
  (absolute Phasen sind unwichtig, aber relative Phasen)
- λ_n ist nicht entartet, wenn es (bis auf α) nur einen zugehörigen Eigenvektor gibt.
- λ_n ist g_n-fach entartet, wenn es g_n linear unabhängige EV'en gibt.

$$A|\psi_n^i\rangle = \lambda_n|\psi_n^i\rangle \qquad , i = 1, \dots, g_n$$

- Lösen des EW-Problems $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$

- wähle orthonormierte vollst. Basis u_i

$$\to \quad \langle u_i|A|\psi\rangle = \lambda \underbrace{\langle u_i|\psi\rangle}_{c_i}$$

$$= \sum_j \langle u_i|A|u_j\rangle\langle u_j|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \sum_j A_{ij} c_j = \lambda c_i$$

$$\to \quad \sum_j (A_{ij} - \lambda\delta_{ij}) c_j = 0$$

lineares homogenes Gleichungssystem
nicht-triviale Lösungen gibt's nur,
wenn $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$

$\Rightarrow$ Lösung nach Methoden der LA

- Diagonalisieren durch unitäre Transformation

$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$

$U^+ A \underbrace{U U^+}_{1} |\psi\rangle = \lambda U^+ |\psi\rangle$

$U^+|\psi\rangle = |\psi'\rangle \longrightarrow \tilde{A}|\psi'\rangle = \lambda|\psi'\rangle$

wähle U so, dass $\tilde{A}$ diagonal ist.

$\Rightarrow$ EW auf diagonale ablesen,

EV sind e_n

1.2.6 Observablen

"Observablen" sind hermitesche Operatoren, deren Eigenvektoren eine vollständige Basis bilden.

Observable $\Rightarrow$ EV vollständige Basis

Physikalische Größen sind dargestellt durch Observablen.

Hermitesch $\Rightarrow$ 1. alle EWe sind reelle

2. EV zu versch. EV sind orthogonal

$A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$

Vollständigkeit wichtig für Messung

Seien A und B zwei kommutierende Observablen

$[A, B] = 0$, dann haben sie einen gemeinsamen Satz von EV, die eine Basis im Zustandsraum bilden.

$A|u_{np}\rangle = a_n|u_{np}\rangle \qquad n = 1, \dots$

$B|u_{np}\rangle = b_p|u_{np}\rangle \qquad p = 1, \dots$

Wenn alle (a_n, b_p) verschieden sind, dann bilden A und B einen vollständigen Satz kommutierender Observablen.

Wenn einige noch entartet sind, gibt es eine weitere Observable C mit $[A, C] = [B, C] = 0$

und $A|u_{npq}\rangle = a_n|u_{npq}\rangle$

$B|\cdots\rangle = b_p|\cdots\rangle \quad , \quad C|u_{npq}\rangle = c_q|\cdots\rangle$

vgl. Wasserstoffatom

$$[H, L^2] = [H, L_z] = [L^2, L_z] = 0$$

$$H|\psi_{n\ell m}\rangle = E_n|\psi_{n\ell m}\rangle \quad , n = 1, \ldots$$

$$L^2|\ldots\rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1)|\ldots\rangle \quad , \ell = 0, \ldots, n-1$$

$$L_z|\ldots\rangle = \hbar m|\ldots\rangle \quad , \quad m = -\ell, \ldots, \ell$$

1.2.7. Beispiele von Observablen

Ortsoperator $\vec{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ (notation Cohen-Tannoudji)

Kap 2

EW-Problem $\vec{R}|\vec{r}_0\rangle = \vec{r}_0|\vec{r}_0\rangle$

Ortsdarstellung (WF)

$$\vec{R}\, \xi_{r_0}(\vec{r}) = \vec{r}_0\, \xi_{r_0}(\vec{r}) \quad , \quad \xi_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = \langle \vec{r}|\vec{r}_0\rangle$$

Es gilt: $\xi_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$

- orthonormiert: $\int d^3\vec{r}\; \xi^*_{\vec{r}_0}(\vec{r})\, \xi_{\vec{r}_0'}(\vec{r}) = \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}_0')$
- vollständig: $\psi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}_0\; c_{\vec{r}_0}\, \xi_{\vec{r}_0}(\vec{r})$

$$= \int d^3 r\; \psi(\vec{r}_0)\, \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}_0')$$

Vollständigkeitsrelation

$$\int d^3\vec{r}_0\; \xi^*_{\vec{r}_0}(\vec{r})\, \xi_{\vec{r}_0}(\vec{r}\,') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

$$= \int d^3\vec{r}_0\; \langle \vec{r}\,'|\underbrace{\vec{r}_0\rangle\langle\vec{r}_0|}_{=1}\vec{r}\rangle = \langle \vec{r}\,'|\vec{r}\rangle = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

Wirkung von $\vec{R}$ auf beliebige Wellenfkt.

$$R\,\psi(\vec{r}) = R\int d^3 r_0\; \psi(\vec{r}_0)\, \xi_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = \int d^3 r_0\; \psi(\vec{r}_0)\, \vec{r}_0\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$= \vec{r}\, \psi(\vec{r})$$

Wirkung: einfache Multiplikation mit $\vec{r}$

Impulsoperator

$$\vec{p}\,|\vec{p}_0\rangle = \vec{p}_0\,|\vec{p}_0\rangle$$

Ortsdarstellung $\quad p\, v_{\vec{p}_0}(\vec{r}) = \vec{p}_0\, v_{\vec{p}_0}(\vec{r})$

$$v_{\vec{p}_0}(\vec{r}) = \langle \vec{r}\,|\,\vec{p}_0\rangle$$

Teilchen sind Wellen mit Impuls $\hbar\vec{k}$

$$v_{\vec{p}_0}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, e^{i\vec{p}\vec{r}/\hbar} \qquad (3\text{ dim.})$$

vollständig wg. Fouriertrafo, orthonormiert

$$\Rightarrow \int d^3p_0\, v_{\vec{p}_0}(\vec{r})\, v_{\vec{p}_0}(\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

$$\int d^3p_0\, p_0\, |p_0\rangle\langle p_0| = \mathbb{1}$$

Wirkung von $\vec{p}$ auf bel. Zustand

$$\vec{p}\,\psi(\vec{r}) = p \int d^3p_0\, \tilde{\psi}(\vec{p}_0)\, v_{\vec{p}_0}(\vec{r}) .$$

$$= \int d^3p_0\, \tilde{\psi}(\vec{p}_0)\, p_0\, \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, e^{i\vec{p}_0\vec{r}/\hbar}$$

$$= \int d^3p_0\, \tilde{\psi}(p_0)\, \frac{\hbar}{i}\nabla v_{p_0}(\vec{r})$$

$$= \frac{\hbar}{i}\nabla\psi(\vec{r})$$