Korrespondenzprinzip

Weitere physikalische Größen in der kl. Physik
$O(\vec{r}, \vec{p}, t)$
entsprechen Operatoren $O(\vec{R}, \vec{P}, t)$
Dabei tauchen Produkte von Operatoren auf
Diese sind schon definiert.
Es tauchen auch beliebige Funktionen von Operatoren auf. Diese sind durch ihre Reihenentwicklung definiert.

Beispiele

- Hamilton Op.
  - freie Teilchen $H = \frac{P^2}{2m} \rightsquigarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$
    in Ortsdarstellung
- Teilchen im Potential
  $H = \frac{P^2}{2m} + V(\vec{R}) \rightsquigarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{R})$

  (Teilchen im Kasten, Potentialstufen und Barrieren,
  Harmonischer Oszillator,
  Wasserstoffatom,)
- geladenes Teilchen im zeitabhängigen E/M-Feld

  $H = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - q\underbrace{\vec{A}(\vec{R}, t)}_{\text{vek. Pot.}}\right)^2 + q\underbrace{\Phi(\vec{R}, t)}_{\text{el. Pot.}}$

  (Landau-Niveaus, (Larmor-freq) $\Rightarrow$ Quanten-Hall-Effekt)

⋮

Vielteilchensysteme mit Wechselwirkung
$\rightarrow$ es wird schwierig und interessant
(Näherungsmethoden)

– Drehimpuls $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} \rightsquigarrow \vec{r} \times \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$

Ortsdarstellung

Problem:

in der klass. Physik: $x \cdot p_x \longrightarrow X \cdot P_x$

$= p_x \cdot x \longrightarrow P_x X \neq X \cdot P_x$

„Symmetrisierungsregel"

wenn die Op. nicht vertauschen,

betrachten wir die symmetrisierte Form

$$x p_x = \frac{1}{2}(x p_x + p_x x) = \frac{1}{2}(X P_x + P_x X)$$

Bei $\vec{L}$ kein Problem, da $L_x = Y P_z - Z P_y$

und $[Y, P_z] = 0$

Aber

$$(\vec{p} - q\vec{A})^2 = p^2 + q^2 A^2 - q\vec{P}\vec{A} - q\vec{A}\vec{P}$$

$$= \dots - q\frac{\hbar}{i}(\vec{\nabla}\vec{A}(\vec{r})) - q\vec{A}(\vec{r})\vec{P} - q\vec{A}\vec{P}$$

also gibt es einen Term $-\frac{\hbar}{i} q (\nabla \vec{A}(\vec{r}))$

Aber wenn wir die Coulomb-Eichung

$\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$ wählen, dann verschwindet dieser Term

– es gibt auch QM-Observablen ohne klassisches Äquivalent $\vec{S}$

Hamilton für Spin im B-Feld $H = \gamma \vec{S} \cdot \vec{B}$

1.2.8 Tensorprodukt von Zustandsräumen

Angenommen der Ham.Op. lässt sich als Summe unabhängiger Terme schreiben

$H = H_1 + H_2$ ← wirken auf separate Freiheitsgrade

$[H_1, H_2] = 0$

für die zwei getrennt die Eigenwertprobleme lösen.

$$H_1 |u_i\rangle = E_i^{(1)} |u_i\rangle \quad ; \quad H_2 |v_e\rangle = E_e^{(2)} |v_e\rangle$$

$$|u_i\rangle \in \mathcal{H}_1 \qquad\qquad |v_e\rangle \in \mathcal{H}_2$$

z.B. Ort z.B. Spin

dann wird das Eigenwertproblem

$$H|\phi_n\rangle = E_n |\phi_n\rangle$$

gelöst durch ein Produkt

$$|\phi_n\rangle = |u_i\rangle \otimes |v_e\rangle \qquad n = (i, e)$$

und $\quad E_n = E_i^{(1)} + E_e^{(2)}$

$$|\phi_n\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

einfachere Schreibweise $|u_i\rangle|v_e\rangle = |u_i\rangle \otimes |v_e\rangle$

$$H|\phi_n\rangle = (H_1 + H_2)|u_i\rangle|v_e\rangle = (H_1|u_i\rangle)|v_e\rangle + |u_i\rangle(H_2|v_e\rangle)$$

$$= (E^{(1)} + E^{(2)})|u_i\rangle|v_e\rangle$$

H_1 wirkt in $\mathcal{H}$ wie $H_1 \otimes \mathbb{1}$

Beispiele

a) Teilchen im 3d - Kasten

$$V(x,y,z) = V(x) + V(y) + V(z)$$

$$V_{x,y,z} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x \le \ell_x \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + V(x) + \frac{p_y^2}{2m} + V(y) + \frac{p_z^2}{2m} + V(z)$$

$$H_1 \varphi_{n_1}(x) = E_n \varphi_{n_1}(x) \quad , \quad \varphi_{n_1} = \sqrt{\frac{2}{\ell_x}} \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{\ell_x}\right)$$

für $0 \le x \le \ell_x$

$$\boxed{E_{nx} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_1 \pi}{\ell_x}\right)^2}$$

insgesamt $\Psi_{n_1 n_2 n_3} = \varphi_{n_1} \cdot \varphi_{n_2} \cdot \varphi_{n_3}$

$$E_{n_1 n_2 n_3} = E_{n_1} + E_{n_2} + E_{n_3}$$

b) Teilchen mit Spin

$$H = \underbrace{\frac{p^2}{2m} + V(R)}_{H_1} + \underbrace{\gamma \vec{S}\vec{B}}_{\text{Spin } H_2}$$

$$\Psi_n(\vec{r}) = \underbrace{\varphi_i(\vec{r})}_{\text{Ortsraum}} \; \underbrace{\chi_m}_{\text{Spin-Raum}}$$

c) mehrere Teilchen

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + V(\vec{R}) + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(\vec{R})$$

unterscheidbare Teilchen

$$\rightarrow \quad \Psi_n(r_1, r_2) = \varphi_1(r_1)\, \varphi_2(r_2)$$

(d) mehrere Teilchen mit WW

$$H = \underbrace{\frac{p_1^2}{2m_1} + V_1(\vec{R})}_{H_1} + \underbrace{\frac{p_2^2}{2m_2} + V_2(\vec{R})}_{H_2} + W(\vec{R}_1 - \vec{R}_2)$$

für $V_1 = V_2 = 0$, $W \neq 0$ $\Rightarrow$ Schwerpunkt und Relativkoordinaten

$$H = H_M + H_{\mu}$$

$\Rightarrow$ Eigenzustände sind Produkte

für $V_1, V_2 \neq 0$ Problem das EW-Problem zu lösen.

aber die EV zu H_1 und H_2 bilden immer noch eine Basis in $\mathcal{H}$ $\quad |u_i\rangle |v_i\rangle$ Basis

Beispiel: 2 Spins

$$H = \gamma \vec{S}_1 \vec{B} + \gamma \vec{S}_2 \vec{B} - \eta \vec{S}_1 \vec{S}_2$$

für S_1 ist Basis $|+\rangle$, $|-\rangle$ $\qquad S_{z_1} |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle$

gleiches für S_2

Basis für beide Spins $\quad |+\rangle |+\rangle = |++\rangle$

$|+\rangle |-\rangle = |+-\rangle$

$|-+\rangle$

$|--\rangle$

Beachte jedes Teilsystem kann in einer Superposition sein $\quad |\varphi\rangle = \sum a_i |u_i\rangle$

$|\chi\rangle = \sum b_\ell |v_\ell\rangle$

$$\Rightarrow \quad |\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle = \left(\sum a_i |u_i\rangle\right) \otimes \left(\sum b_\ell |v_\ell\rangle\right) = \sum_{i\ell} a_i b_\ell |u_i\rangle |v_\ell\rangle$$

Produktzustände

Es gibt auch Zustände, die sich nicht als Produkt von Superposition schreiben lassen

Bspl. $\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle^1 |-\rangle^2 - |-\rangle^1 |+\rangle^2 \right)$

Diese Zustände nennt man **verschränkte Zustände**

seltsame Eigenschaften verschränkter Zustände

Einstein – Podolski – Rosen – Paradoxon

Schrödingers Katze

Bellsche Ungleichungen

Teleportation $\qquad$ in einem extra Kapitel

Quantencomputer