1.3 Zeitentwicklung

1.3.1 Postulat der zeitabhängigen SGL

In der klass. Mechanik ist die Zeitentwicklung eines Zustandes (= Pkt im Phasenraum) gemäß der Hamilton-Jacobi Gleichung gegeben.

$$\frac{d}{dt} r_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \frac{d}{dt} p_i = - \frac{\partial H}{\partial r_i}$$

mit $H(\vec{r}, \vec{p}, t)$ Hamilton-Fkt.

In der QM folgt die Zeitentwicklung eines Zustandes aus zeitabh. SGL

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle$$

- gilt für jeden Zustand
- deterministische Zeitentwicklung

1.3.2 Unitäre Zeitentwicklung

$$|\psi(t)\rangle = U(t) \, |\psi(t_0)\rangle$$

Zeitentwicklungsoperator

Eigenschaften: $U(t_0, t_0) = \mathbb{1}$

Erhaltung der Norm $\langle \psi(t_0) | \psi(t_0) \rangle = 1$

$$\Rightarrow \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 1$$

$$= \langle \psi(t_0) | U^+ U | \psi(t_0) \rangle$$

$\Rightarrow U^+ U = 1 \Rightarrow U$ ist unitär

Es gilt $U(t, t_0) = U(t, t_1) \, U(t_1, t_0)$

(für $t \geq t_1 \geq t_0$)

Einsetzen in zeitabh. SGL

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t,t_0) \cancel{|\Psi(t_0)\rangle} = H(t) \cancel{|\Psi(t_0)\rangle}$$

muss für alle Ψ_0 gelten

äquivalente Integralgleichung

$$U(t,t_0) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\, H(t')\, U(t',t_0)$$

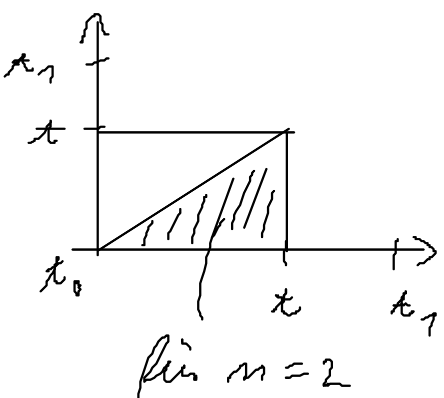
iteratives Einsetzen

$$U(t,t_0) =$$

$$\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\, H(t') - \frac{1}{\hbar^2}\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt''\, H(t') H(t'') + \underbrace{\frac{i}{\hbar^3}\int \ldots}_{usw}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, H(t_1) H(t_2) \ldots H(t_n)$$

Dyson - Reihe



für $n=2$

$t_1 > t_2 > t_3 \cdots > t_n$

und $H(t_i)$ geordnet nach fallenden Zeiten

Umschreiben der Integrale

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t} T\, H(t_1) H(t_2) \cdots H(t_n)$$

ABER i.A. gilt $H(t_1) H(t_2) \neq H(t_2) H(t_1)$

daher **Zeitordnungsoperator** ordnet Elemente fallend nach der Zeit

$$T\left(H(t_1) H(t_2)\right) = \begin{cases} H(t_1) H(t_2) & t_1 \geq t_2 \\ H(t_2) H(t_1) & t_2 \geq t_1 \end{cases}$$

Mit T kann man nun umschreiben:

$$U(t, t_0) = T\left[\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\, H(t')\right)\right]$$

Kurzschreibweise für Dyson-Reihe

Spezialfälle

Wenn H zeitunabhängig, ist

$$U(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H (t - t_0)\right)$$

wenn $H(t)$ von Zeit abhängig, aber

$$U(t, t_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\, H(t')\right)$$

Beispiel a) $H(t) = \frac{p^2}{2m} + V(r)\cos(\omega t)$

$$[H(t_1), H(t_2)] = \left(\frac{p^2}{2m}\right)^2 + \frac{p^2}{2m} V(r)\cos\omega t_1$$

$$+ \frac{p^2}{2m} V(r)\cos\omega t_2 + V(r)^2 \cos\omega t_1 \cos\omega t_2$$

$$- \left(\frac{p^2}{2m}\right)^2 - V(r)^2 \cos\omega t_1 \cos\omega t_2$$

$$- \frac{p^2}{2m} V(r)\cos\omega t_2$$

$$- \frac{p^2}{2m} V(r)\cos\omega t_1$$

bei $[p^2, V(r)] = 0$ gehts ... ?!

b) Spin im zeitabh. B-Feld in z-Richt.

$$H = \gamma \vec{S}\,\vec{B}(t) = \gamma \frac{\hbar}{2}\sigma_z B_z(t)$$

$$\Rightarrow [H(t_1), H(t_2)] = 0$$

wenn $\vec{B}(t)$ die Richtung auch ändert, dann

$$[H(t_1), H(t_2)] \neq 0$$

Alternativ, wenn $H(t)$ stückweise konstant ist oder infinitesimale Zeitschritte konstant ist

$$t = N\Delta t \qquad (t_0 = 0)$$

$$U(t, 0) = U(t, (N-1)\Delta t)\, U((N-1)\Delta t, (N-2)\Delta t)) \cdots$$

für $\Delta t \longrightarrow 0$

$$U[(\nu+1)\Delta t, \nu \Delta t] = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H(\nu \Delta t)\, \Delta t$$

$$\nu = 0, \ldots, N-1$$

1.3.3 Stationäre Zustände – die zeitunabh. SGL

Betrachte System mit zeitunabh. H

$$\Rightarrow \quad i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

Dann gibt es die sog. stationären Zustände, für die die Zeitabhängigkeit faktorisiert abgespalten werden kann.

$$|\psi(t)\rangle = |\varphi_n\rangle \; \chi_n(t)$$

Diese Zustände erfüllen

$$H|\varphi_n\rangle = E_n |\varphi_n\rangle$$

d. h. zeitunabh. SGL und

$$\chi_n(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$$

nur $|\psi|^2$ ist tatsächlich zeitunabhängig.

ABER Fast alle Zustände $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ haben keine einfache Zeitabhängigkeit

Superposition

$$|\psi(0)\rangle = \lambda_1 |\varphi_1(0)\rangle + \lambda_2 |\varphi_2(0)\rangle$$

$$|\phi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) \left(\lambda_1 |\varphi_1(0)\rangle + \lambda_2 |\varphi_2(0)\rangle\right)$$

$$e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\varphi_1(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} |\varphi_1(0)\rangle$$

$$\Rightarrow \quad |\phi(t)\rangle = \lambda_1 e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} |\varphi_1(0)\rangle + \lambda_2 e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t} |\varphi_2(0)\rangle$$

$\Rightarrow$ kohärente Oszillationen mit Freq $\omega = \dfrac{E_1 - E_2}{\hbar}$

1.3.4 Schrödinger-, Heisenberg-, WW-Bild

Schrödinger-Bild: Zustände zeitabhängig,

$$| \psi_S(t) \rangle = U(t, t_0) \, | \psi_S(t_0) \rangle$$

Observablen meist zeitunabhängig

$P, R, \vec{L}$

Heisenberg-Bild: zeitunabhängige Zustände

$| \psi_H \rangle$

zeitabhängige Observablen

Transformation

$$| \psi_H \rangle = U^+(t, t_0) \, | \psi_S(t) \rangle$$
$$= U^+ U \, | \psi_S(t_0) \rangle = | \psi_S(t_0) \rangle$$

$$A(t) = U^+(t, t_0) \, A_S(t) \, U(t, t_0)$$

Insbesondere findet man, dass Erwartungswerte in beiden Bildern gleich sind

$$\langle A \rangle = \langle \psi_H | A_H(t) | \psi_H \rangle$$
$$= \langle \psi_S(t) | U U^+ A_S(t) U U^+ | \psi_S(t) \rangle$$
$$= \langle \psi_S | A_S(t) | \psi_S \rangle$$

Zeitentwicklung $\quad \frac{i}{\hbar} U^+ H_S$

$$\frac{d}{dt} A_H(t) = \left(\frac{d}{dt} U^+ \right) A_S U + U^+ A \left(\frac{d}{dt} U \right)$$
$$+ U^+ \left(\frac{d}{dt} A_S \right) U \qquad = \frac{1}{i\hbar} H_S U$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar \frac{d}{dt} A_H(t) = [A_H, H_H] + i\hbar \left(\frac{d}{dt} A_S(t) \right)_H$$

ins Heisenberg-Bild transformiert

Heisenberg - Bew. Gl.

- Wenn A_S nicht exp. von der Zeit abhängt und $[A_H, H] = 0$, so ist A eine Erhaltungsgröße
- $H = \frac{P^2}{2m} + V(R) \qquad (A = P)$

$$\frac{d}{dt} P_H(t) = -\nabla V_H(R)$$

$$\frac{d}{dt} R_H(t) = \frac{P_H}{m}$$

Wechselwirkungsbild

$$H(t) = H_0 + V(t)$$

definiere: $\quad U_0(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 (t - t_0)}$

$$|\Psi_I(t)\rangle = U_0^+(t, t_0) \, |\Psi_S(t)\rangle$$

$$A_I(t) = U_0^+(t, t_0) \, A_S(t) \, U_0(t, t_0)$$

Erwartungswerte bleiben unverändert

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi_I(t)\rangle = V_I(t) \, |\Psi_I(t)\rangle$$

„Störung" um H_0 bleibt übrig

$$|\Psi_I(t)\rangle = U_I(t, t_0) \, |\Psi_I(t_0)\rangle$$

Interaction

$$\Rightarrow U_I(t, t_0) = T \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} dt' \, V_I(t')\right)$$

Damit kann man für kleine V_I danach entwickelt werden.