$$U(t, t_0) = T \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} dt' \; H(t') \right]$$

Bsp

$$H(t) = \frac{P^2}{2m} + V(R) \cos(\omega t)$$

$$[H(t_1), H(t_2)] = \left[\frac{P^2}{2m}, V(R)\cos(\omega t_2)\right] + \left[V(R)\cos\omega t_1, \frac{P^2}{2m}\right]$$

$$= \left[\frac{P^2}{2m}, V(R)\right](\cos\omega t_1 - \cos\omega t_2) \neq 0$$

1.4 Messprozess

weitere Postulate für ideale **starke Messung**

1.4.1 Einzelne Messung

Wir haben ein System im Zustand $|\psi\rangle$ und wir messen eine Observable A

Observable $A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle$ $\quad |u_n\rangle$ vollst.

a_n reell

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |u_n\rangle$$

- Bei einer idealen Messung von A sind die einzigen möglichen Ergebnisse die Eigenwerte a_n
- Die Wahrscheinlichkeit, bei einer einzelnen Messung a_n zu messen, ist gegeben durch c_n:

$$P(a_n) = |c_n|^2 = |\langle u_n|\psi\rangle|^2$$

mit $P_n = |u_n\rangle\langle u_n|$

- Mit Entartung: $|\psi\rangle = \sum_n \sum_i^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle$

ist Wahrscheinlichkeit a_n zu messen

$$P(a_n) = \sum_i^{g_n} |c_n^i|^2 = \langle\psi|P_n|\psi\rangle \quad \text{mit} \quad P_n = \sum_i^{g_n} |u_n^i\rangle\langle u_n^i|$$

- Kollaps der Wellenfunktion
  Wenn der Wert a_n gemessen wurde, dann ist der Zustand nach der Messung der zugehörige EV von A, nämlich $|u_n\rangle$

(mit Entartung:

$$|\psi\rangle = \sum_n \sum_i^{g_n} c_n^i \, |u_n^i\rangle \xrightarrow{a_n \text{ gemessen}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\sum_i^{g_n} |c_n^i|^2}}}_{\text{Normierung}} \sum_i^{g_n} c_n^i \, |u_n^i\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\psi|P_n|\psi\rangle}} P_n |\psi\rangle$$

$(P_n^2 = P_n)$

Ausblick:

reale Messung ist Kopplung des Messgeräts an Quantensystem. Messgerät lässt sich auch durch einen H-Operator beschreiben.

$$H_{Ges} = H_{Sys} + H_{Mess} + H_{Koppl.}$$

Das Messgerät sollte makroskop. ablesbare Eigenschaften haben.

Bsp Ortsmessung $R|r_0\rangle = r_0|r_0\rangle$

mögliche Ergebnisse sind r_0

mit WS $\mathcal{P}(r_0) = |\langle r_0|\psi\rangle|^2 = |\psi(r_0)|^2$

Impuls

mögliche Ergebnisse p, mit WS $\mathcal{P}(p) = |\langle p|\psi\rangle|^2$
$= |\tilde{\psi}(p)|^2$

1.4.2 Erwartungswert

viele ($N \to \infty$) Messungen von A für einig. weiter denselben Zustand $|\psi\rangle$.

Dann erhalten wir $\mathcal{N}(a_n)$ mal den Wert a_n.

mit $\mathcal{N}(a_n) = N \cdot \mathcal{P}(a_n)$ und $\sum_n \mathcal{N}(a_n) = N$

$$\langle A\rangle_\psi = \frac{1}{N}\sum_n a_n \mathcal{N}(a_n) = \sum_n a_n \mathcal{P}(a_n)$$

Mittelwert $\langle\ \rangle$

$$= \sum_n a_n \langle\psi|u_n\rangle\langle u_n|\psi\rangle$$

$$= \sum_n \langle\psi|A|u_n\rangle\langle u_n|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|A|\psi\rangle \quad \text{Erwartungswert}$$

Standard - Abweichung ΔA

$$(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A\rangle)^2\rangle$$

$$= \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$$

$$\neq 0 \quad \text{außer für Eigenzustände}$$

"Full counting statistics" ist gegeben durch $\mathcal{P}(a_n)$

1.4.3 Mehrere Messgrößen

heißt das, dass A und B auf versch. $\mathcal{H}$ - Unterräumen operieren?

Vertauschen der Observablen $[A, B] = 0$

nein, $[A,A] = 0$ ist doch im gleichen $\mathcal{H}$

$\Rightarrow$ gemeinsame Basis

$$A\,|u_{np}\rangle = a_n\,|u_{np}\rangle$$

$$B\,|u_{np}\rangle = b_p\,|u_{np}\rangle$$

Zustand $|\psi\rangle = \sum_{n,p} c_{np}\,|u_{np}\rangle$

Messe erst A erhalte a_n mit $\mathcal{P}(a_n) = \sum_p |\langle u_{np}|\psi\rangle|^2$

Kollaps $\to$ danach ist $|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_p |c_{np}|^2}} \sum_p c_{np}\,|u_{np}\rangle$

Messe danach B, erhalte b_p mit

$$P_{a_n}(b_p) = |\langle u_{np} | \psi' \rangle|^2$$
$$= \frac{1}{\sum_p |c_{np}|^2} |c_{np}|^2$$

gemeinsame Wahrscheinlichkeit erst a_n, dann b_p zu messen, ist

$$P(a_n, b_p) = P_{a_n}(b_p) \, P(a_n) = |c_{np}|^2$$

ist unabhängig von der Reihenfolge (da $[A,B] = 0$)

Nicht vertauschende Observablen $[A,B] \neq 0$

$\Rightarrow$ Heisenbergsche Unschärferelation

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A,B] \rangle|$$

Sukzessive Messung von A und B

$$A|u_n\rangle = a_n |u_n\rangle$$
$$B|v_p\rangle = b_p |v_p\rangle$$

Zustand $|\psi\rangle$

messe erst A $\longrightarrow$ erhalte a_n mit $P(a_n) = |\langle u_{n} | \psi\rangle|^2$

danach ist Zustand $|\psi'\rangle = |u_n\rangle$

danach messe B $\longrightarrow$ erhalte b_p mit $P(b_n) = |\langle v_p | u_n\rangle|^2$

WS erst a_n dann b_p zu messen, ist

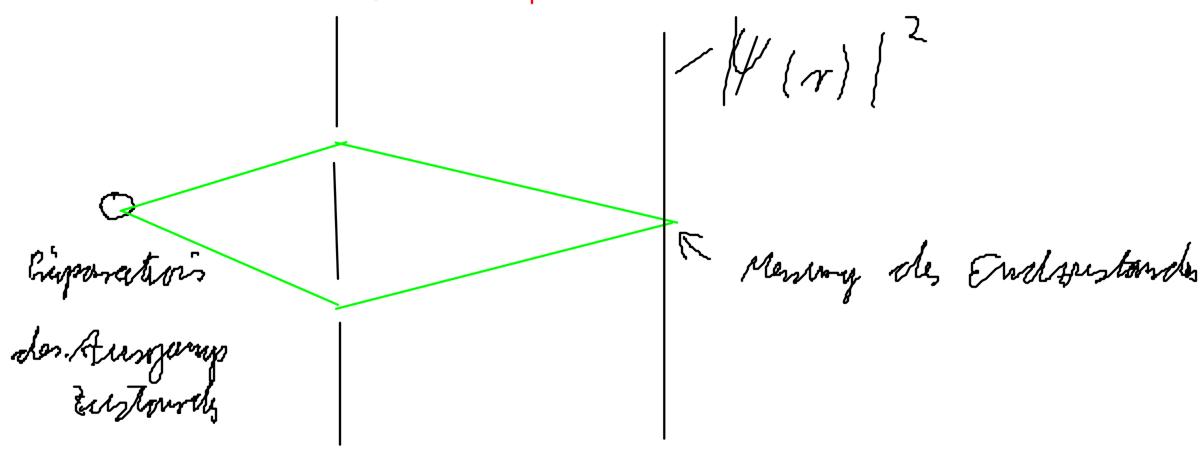
$$P_{a_n}(b_p) \, P(a_n) = |\langle v_p | u_n \rangle|^2 \, |\langle u_n | \psi \rangle|^2$$

Umgekehrt: erst B dann A

$$P_{b_p}(a_n) \, P(b_n) = |\langle u_n | v_p \rangle|^2 \, |\langle v_p | \psi \rangle|^2$$

Die WS a_n und b_p zu messen, hängt von der Reihenfolge der Messungen ab.

1.5 Interferenzeffekte



1) Präparation eines wohldefinierten Anfangszustands durch Messung einer Observablen A.

$A|u_a\rangle = a|u_a\rangle$ Wenn speziell A gemessen wurde, ist der Zustand danach $|u_a\rangle$

2) Wir messen für den Zustand $|u_a\rangle$ eine Observable B

$B|w_b\rangle = b|w_b\rangle$ und dann messen wir C

$C|v_c\rangle = c|v_c\rangle$

WS erst b, dann c zu messen, ist

$$P_a(b;c) = P_b(c)\,P_a(b) = |\langle v_c|w_b\rangle|^2 |\langle w_b|u_a\rangle|^2$$

3) Wir messen nur c (nicht b)

WS c zu messen

$$P_a(c) = |\langle v_c|u_a\rangle|^2$$

Klassisch erwarten wir, dass das Ergebnis von c-Messung unabhängig davon ist, ob wir b gemessen haben.

$$P_a^{kl}(c) = \sum_b P_a^{kl}(b;c)$$

aber quantenmechanisch mit Messung von b

$$P_a^{\text{mit Messung}}(c) = \sum_b |\langle v_c | w_b \rangle|^2 \, |\langle w_b | u_a \rangle|^2$$

ohne Messung von b

$$P_a(c) = |\langle v_c | u_a \rangle|^2 = \left| \sum_b \langle v_c | w_b \rangle \langle w_b | u_a \rangle \right|^2$$

Amplituden werden addiert und dann quadriert

(Phase wirkt sich auf WS aus!)

Klassisch addiert man Wahrscheinlichkeiten