Nachtrag zur Zeitentwicklung

$$U(t,t_0) = T\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\, H(t')\right]$$

Beispiel:

$$H(t) = \frac{P^2}{2m} + V(R)\cos(\omega t)$$

$$[H(t_1), H(t_2)] = \left[\frac{P^2}{2m}, V(R)\cos(\omega t_2)\right] + \left[V(R)\cos(\omega t_1), \frac{P^2}{2m}\right]$$

$$= \underbrace{\left[\frac{P^2}{2m}, V(R)\right]}_{\neq 0}\left(\cos(\omega t_2) - \cos(\omega t_1)\right) \neq 0$$

1.4 Messprozess

weitere Postulate für ideale starke Messung

1.4.1 Einzelne Messung

Wir haben ein System im Zustand $|\Psi\rangle$ und messen eine Observable A.

Observable: $A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle$ $\quad |u_n\rangle$ vollst., a_n reell

$|\Psi\rangle$ kann entwickelt werden: $|\Psi\rangle = \sum_n c_n|u_n\rangle$

- Bei einer idealen Messung von A sind die einzigen mögl. Ergebnisse die Eigenwerte a_n.
- Die Wahrscheinlichkeit a_n zu messen bei einer einzelnen Messg ist gegeben durch $\boxed{p(a_n) = |c_n|^2 = |\langle u_n|\Psi\rangle|^2 = \langle\Psi|P_n|\Psi\rangle}$ (Projektion von Ψ auf u_n) mit $P_n = |u_n\rangle\langle u_n|$ (ohne Entartung)

mit Entartung: $\sum_n \sum_{i=1}^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle$

(g_n-fache) Wahrscheinlichkeit a_n zu messen:

$$\boxed{p(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |c_n^i|^2 = \langle\Psi|P_n|\Psi\rangle}$$ mit $P_n = |u_n^i\rangle\langle u_n^i|$

- Kollaps der Wellenfunktion: Wenn der Wert a_n gemessen wurde, dann ist der Zustand nach der Messung der zugehörige EV von A nämlich u_n (ohne Entartung)

Mit Entartung:

$$\boxed{P_n^2 = P_n}$$

$$\boxed{|\Psi\rangle = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle \xrightarrow{a_n\text{ gemessen}} \frac{1}{\sqrt{\sum |c_n^i|^2}} \sum_{i=1}^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\Psi|P_n|\Psi\rangle}} P_n|\Psi\rangle}$$

Starke Messung von $A \hat{=}$ Projektion von $|\psi\rangle$ auf die Basisvekt. v. A

Ausblick: reale Messung bedeutet: Kopple Quantenzustand $|\psi\rangle$ an ein Messgerät, dass wieder durch ein Hamilton Op. beschrieben wird. $H_{ges} = H_{syst} + H_{Messgerät} + H_{Kopplg}$

Das Messgerät soll makroskopisch auslesbare Eigenschaften haben ("Zeiger").

Beispiele • Ortsmessung $R|r_0\rangle = r_0|r_0\rangle$

mögliche Ergebnisse sind r_0 mit $P(r_0) = |\langle r_0|\psi\rangle|^2 = |\psi(r_0)|^2$

• Impulsmessung $P|p\rangle = p|p\rangle$

mögliche Ergebnisse sind p mit $P(p) = |\langle p|\psi\rangle|^2 = |\tilde{\psi}(p)|^2$

($\tilde{\psi}(p)$ ist Fouriertransformierte von ψ)

1.4.2 Erwartungswert

Viele ($N \to \infty$) Messungen von A für immer wieder denselben Zustand $|\psi\rangle$. Dann erhalten wir $N(a_n)$ mal den Wert a_n mit $N(a_n) = N \cdot P(a_n)$ und $\sum_n N(a_n) = N$

$\Rightarrow$ Mittelwert der Messungen

$$\boxed{\begin{aligned} \langle A\rangle_{|\psi\rangle} &= \frac{1}{N}\sum_n a_n N(a_n) = \sum_n a_n P(a_n) \\ &= \sum_n a_n \langle\psi|u_n\rangle\langle u_n|\psi\rangle \\ &= \sum_n \langle\psi|A|u_n\rangle\langle u_n|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|A|\psi\rangle \quad \textbf{Erwartungswert} \end{aligned}}$$

mit $\sum_n |u_n\rangle\langle u_n| = \mathbb{1}$

$\Rightarrow$ **Standardabweichung** ΔA

$$\boxed{(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A\rangle)^2\rangle = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2} \neq 0 \text{ im Allgemeinen}$$

$= 0$ für $|\psi\rangle = |u_n\rangle$

"Full counting statistics" ist gegeben durch $P(a_n)$

1.4.3 Mehrere Messgrößen

Vertauschende Observablen $[A, B] = 0$

$\Rightarrow$ gemeinsame Basis $A|u_{np}\rangle = a_n|u_{np}\rangle$

$B|u_{np}\rangle = b_p|u_{np}\rangle$

beliebiger Zustand $|\Psi\rangle = \sum_{np}' c_{np}|u_{np}\rangle$

- Messe erst A erhalte a_n mit $\mathcal{P}(a_n) = \sum_p |\langle u_{np}|\Psi\rangle|^2 = \sum_p |c_{np}|^2$
- Kollaps $\Rightarrow$ danach $|\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{p'} |c_{np'}|^2}} \sum_{p} c_{np'}|u_{np'}\rangle$
- Messe B

erhalte b_p mit $\mathcal{P}_{a_n}(b_p) = |\langle u_{np}|\Psi'\rangle|^2$

$= \frac{|c_n|^2}{\left(\sum_{p'} |c_{np'}|^2\right)}$

- gemeinsame Wahrscheinlichkeit erst a_n, dann b_p zu messen $\mathcal{P}(a_n, b_p) = \mathcal{P}_{a_n}(b_p)\,\mathcal{P}(a_n) = |c_{np}|^2$

ist unabhängig von der Reihenfolge.

<u>Nicht vertauschende Observablen $[A,B] \neq 0$</u>

$\Rightarrow$ Es gilt die Heisenbergsche Unschärferelation

$$\boxed{\Delta A \, \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A,B] \rangle|}$$

Sukzessive Messung von A und B

$A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle$

$B|v_p\rangle = b_p|v_p\rangle$

Zustand $|\Psi\rangle$

- messe erst A erhalte a_n mit $\mathcal{P}(a_n) = |\langle u_n|\Psi\rangle|^2$
- danach ist Zustand $\Psi' = |u_n\rangle$ (ohne Entartung)
- messe dann B erhalte b_p mit $\mathcal{P}_{a_n}(b_p) = |\langle v_p|u_n\rangle|^2$

WS erst a_n dann b_p zu messen

$\mathcal{P}(a_n, b_p) = \mathcal{P}_{a_n}(b_p)\,\mathcal{P}(a_n) = |\langle v_p|u_n\rangle|^2 \cdot |\langle u_n|\Psi\rangle|^2$

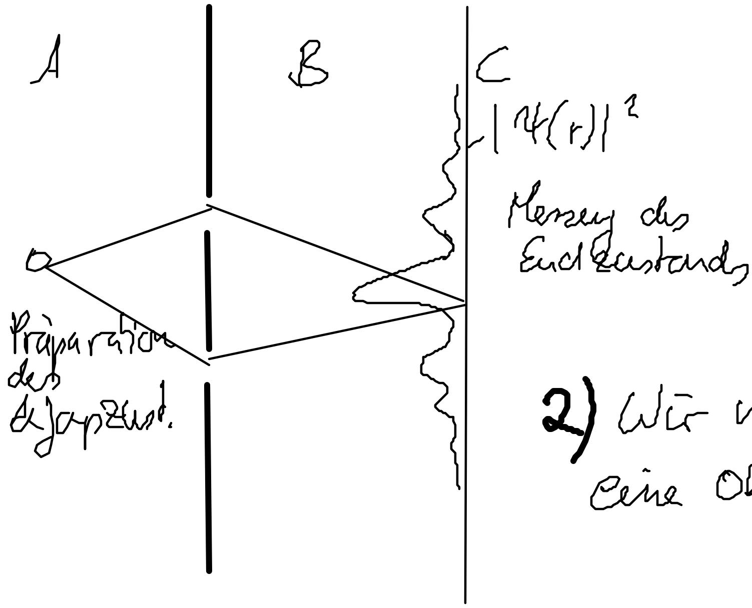
- erst B dann A, b_p dann a_n verschieden

$\mathcal{P}(b_n, a_n) = \mathcal{P}_{b_p}(a_n)\,\mathcal{P}(b_p) = |\langle u_n|v_p\rangle|^2 \cdot |\langle v_p|\Psi\rangle|^2$

<u>WS a_n und b_p zu messen hängt von der Reihenfolge der Messung ab.</u>

1.5 Interferenzeffekte

Beispiel: Doppelspalt



1) Präparation eines wohldef. Anfangszustands durch Messung einer Observablen A

$A\,|u_a\rangle = a\,|u_a\rangle$

Wenn spezielles a gemessen wurde ist der Zustand danach $|u_a\rangle$

2) Wir messen für den Zustand $|u_a\rangle$ eine Observable B. $B\,|w_b\rangle = b\,|w_b\rangle$

$C\,|v_c\rangle = c\,|v_c\rangle$

und dann messen wir C

WS erst b, dann c zu messen

$$P(a;b;c) = P_b(c)\,P_a(b) = |\langle v_c|w_b\rangle|^2\,|\langle w_b|u_a\rangle|^2$$

3) Wir messen nur c: $P_a(c) = |\langle u_a|v_c\rangle|^2$

Klassisch erwarten wir:

Das Ergebnis von C Messung ist unabhängig davon, ob B gemessen wurde

$$P_a^{\text{klassisch}}(c) = \sum_b P^{\text{klassisch}}(a;b;c)$$

Wir addieren Wahrscheinlichkeiten

Quantenmechanisch: aber mit Messung von B und Summation

$$P_a^{\text{mit Messung}}(c) = \sum_b |\langle v_c|w_b\rangle|^2\,|\langle w_b|u_a\rangle|^2$$

ohne Messung von B

$$P_a(c) = |\langle v_c|u_a\rangle|^2 = \Big|\sum_b \langle v_c|w_b\rangle\langle w_b|u_a\rangle\Big|^2$$

Amplituden werden addiert, dann wird quadriert um Wahrscheinlichkeiten zu erhalten.