Wiederholung und Korrektur

$H_1 = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

Bahn: $\vec{\mu} = \mu \frac{1}{\hbar} \vec{L}$, $\mu = \frac{g\hbar}{2m}$

Elektronen $\mu = \mu_B = -\frac{|e|\hbar}{2m_e}$ oft auch $\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m_e}$

Spin: $\vec{\mu} = g\mu \frac{1}{\hbar} \vec{S}$

Elektron $\mu = \mu_B$ $\quad g = 2\left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} + \ldots\right] \approx 2$

Kerne $\mu = \mu_N := \frac{|e|\hbar}{2m_p} \ll |\mu_B|$

Proton: $g = 5{,}586\ldots$

Neutron: $g = -3{,}826\ldots$

Darstellungen für $S = \frac{1}{2}$

$[S_x, S_y] = i\hbar S_z$ und zykl. Vert.

$[S^2, S_z] = 0 \longrightarrow S^2|sm\rangle = \hbar^2 s(s+1)|sm\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |sm\rangle$

$-s \leq m \leq s$ $\quad S_z|sm\rangle = \hbar m |sm\rangle$

$s = \frac{1}{2}$ $\quad m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

Darstellung durch Pauli-Matrizen

$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ $\quad \sigma_x \sigma_y = i\sigma_z$ und zyklisch $\quad \sigma_y \sigma_x = -i\sigma_z$

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

nützlich einzuführen: $\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (Spin nach oben drehen)

Spinflip operatoren: $\sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (Spin nach unten drehen)

Notation:

$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = |+\rangle = |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ orthonormiert

$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = |-\rangle = |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und vollständig

$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1 \longrightarrow S^2 = \frac{\hbar^2}{4}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) = \frac{3}{4}\hbar^2$

Superposition

$|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$ $\quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$$|\psi\rangle = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} |+\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} |-\rangle\right)$$

Erwartungswerte

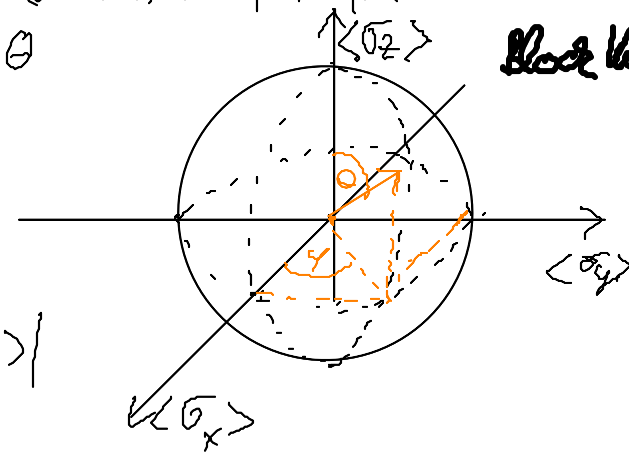
$$\langle\sigma_z\rangle = \langle\psi|\sigma_z|\psi\rangle = (\alpha^*, \beta^*) \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = |\alpha|^2 - |\beta|^2$$

$$= \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta$$

$$\langle\sigma_x\rangle = \sin\theta\cos\varphi$$

$$\langle\sigma_y\rangle = \sin\theta\sin\varphi$$

Bloch Kugel

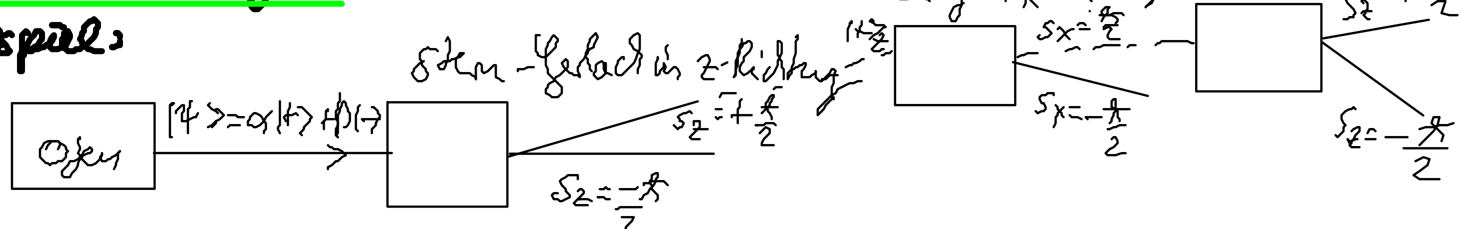


Beachte

$$\Delta\sigma_x \, \Delta\sigma_y \geq \frac{1}{2} \left|\langle[\sigma_x,\sigma_y]\rangle\right| = |\langle\sigma_z\rangle|$$

Spin Messung

Beispiel:



① Messung von S_z: $\quad S_z|\nu\rangle_z = \nu\frac{\hbar}{2}|\nu\rangle_z \qquad \nu=+,-$

a) Wahrscheinlichkeit $+\frac{\hbar}{2}$ zu finden ist $|{}_z\langle+|\psi\rangle|^2 = |\alpha|^2$

Nach der Messung ist der Zustand $|+\rangle_z$

(weitere Messungen an diesem Zustand $\quad S_z$ liefert mit Sicherheit $+\frac{\hbar}{2}$)

b) das selbe für $-\frac{\hbar}{2}$

② Messung von $S_x \quad S_x|\nu\rangle_x = \nu\frac{\hbar}{2}|\nu\rangle_x \qquad \nu=+,-$

$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z \pm |-\rangle_z)$

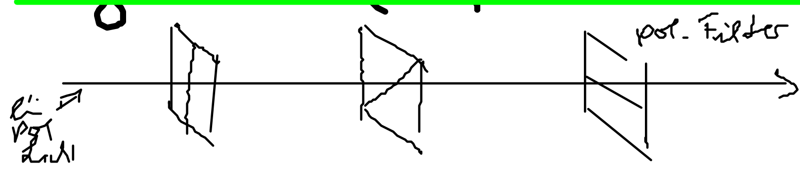
$|\psi\rangle = |+\rangle_z$ Messe $S_x = +\frac{\hbar}{2}$ mit WS $|{}_x\langle+|+\rangle_z|^2 = \frac{1}{2}$

Nach der Messung ist der Zustand $|\psi\rangle = |+\rangle_x$

③ Messung von S_z

$\Rightarrow$ erhalte $S_z = +\frac{\hbar}{2}$, $S_z = -\frac{\hbar}{2}$ beide WS $\frac{1}{2}$

Vergleich mit (lin. polarisiertem Licht) Optik



- zwei ⊥ Filter lassen nichts durch
- mit einem 45° ∠ Filter schon

3.2 Spin-Dynamik

Kohärente Oszillation

Spin im Magnetfeld in z-Richtung

$$\boxed{H = -g\frac{\mu}{\hbar}\vec{S}\cdot\vec{B} = -g\frac{\mu}{2}B\sigma_z = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z}$$

Larmorfrequenz $\hbar\omega_0 = g\mu B$

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Grundzustandsenergie } (\hbar\omega_0 > 0)$$

$$\boxed{\begin{aligned} E_g &= -\frac{\hbar\omega_0}{2} \\ E_e &= \frac{\hbar\omega_0}{2} \end{aligned}}$$

Angeregte Energie

Diagonalform von H: $H = \begin{pmatrix} E_0 & & 0 \\ & E_1 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$ Grundzustand, 1. Angeregter, 2., ⋮

(Achtung unterschiedl. Notationen der E Reihenfolge)

- Für $\omega_0 > 0$, $q > 0$ ist H in üblicher Anordnung
- Für $\omega_0 < 0$, $q < 0$ (Elektronen) { nehme $H = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & & \\ 0 & & E_0 \end{pmatrix}$ c.T. oder $|+\rangle \to |-\rangle, |-\rangle \to |+\rangle$

$$|\psi(t=0)\rangle = \alpha_0|+\rangle + \beta_0|-\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-i\frac{H}{\hbar}t\right]|\psi(0)\rangle = \exp\left[i\frac{\omega_0}{2}t\,\sigma_z\right]|\psi(0)\rangle$$

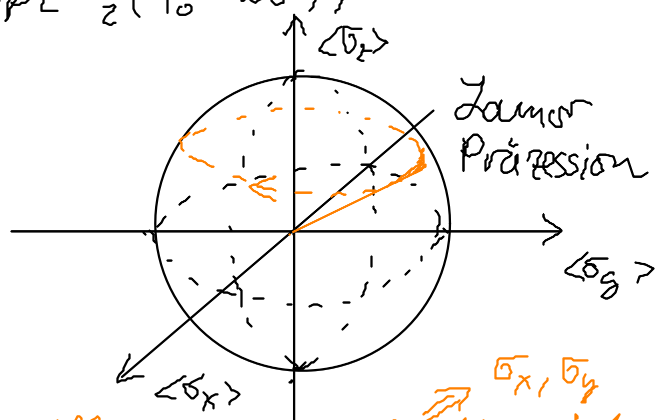
$$= \exp\left[i\frac{\omega_0}{2}t\right]\alpha_0|+\rangle + \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}t\right]\beta_0|-\rangle$$

$$= \exp\left[i\frac{\chi}{2}\right]\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_0}{2}\exp\left[-i\frac{1}{2}(\varphi_0 - \omega_0 t)\right] \\ \sin\frac{\theta_0}{2}\exp\left[i\frac{1}{2}(\varphi_0 - \omega_0 t)\right] \end{pmatrix}$$

$$\langle\sigma_z\rangle(t) = \cos\theta_0$$

$$\langle\sigma_x\rangle(t) = \sin\theta_0\cos(\varphi_0 - \omega t)$$

$$\langle\sigma_y\rangle(t) = \sin\theta_0\sin(\varphi_0 - \omega t)$$



Kohärente Oszillation: verschiedene Zeitabhängigkeit der Eigenvektoren führt zur Oszillation geeigneter Messgrößen σ_x, σ_y

(manchmal fälschlicher Weise Rabi-Oszillation genannt)

Frequenz $\omega_0 \Rightarrow$ also $\langle\vec{\sigma}\rangle(t = \frac{2\pi}{\omega_0}) = \langle\vec{\sigma}\rangle(0)$

Zustand $|\psi\rangle(t = \frac{2\pi}{\omega_0}) = -|\psi\rangle(0)$

$$|\psi\rangle(t = \tfrac{4\pi}{\omega_0}) = |\psi\rangle(0)$$

Alle Observablen drehen sich mit der Frequenz ω_0
aber der Zustand ändert Vorzeichen (wegen $\frac{1}{2}$).

Drehung um Achse

Angenommen $\hat{B}$ zeigt (ab $t=0$) in x-Richtung

$$H = -g\frac{\mu}{2} B_x \sigma_x \qquad U(t,0) = \exp\left[-i\frac{H}{\hbar}t\right] = \exp[i\zeta\sigma_x]$$

$$\zeta = g\frac{\mu}{2\hbar} B_x t$$

$$\exp[i\zeta\sigma_x]\,|\psi\rangle \qquad (\zeta \mathrel{\hat{=}} \text{zeta})$$

Lösungsmöglichkeiten

① Entwickle $|\psi\rangle$ in Basis zu σ_x ...

② $$\exp[i\zeta\sigma_x] = 1 + i\zeta\sigma_x - \frac{1}{2!}\zeta^2\underbrace{\sigma_x^2}_{=\mathbb{1}} - \frac{i}{3!}\zeta^3\underbrace{\sigma_x^3}_{=\sigma_x}$$
$$= \cos(\zeta)\mathbb{1} + i\sin(\zeta)\sigma_x$$

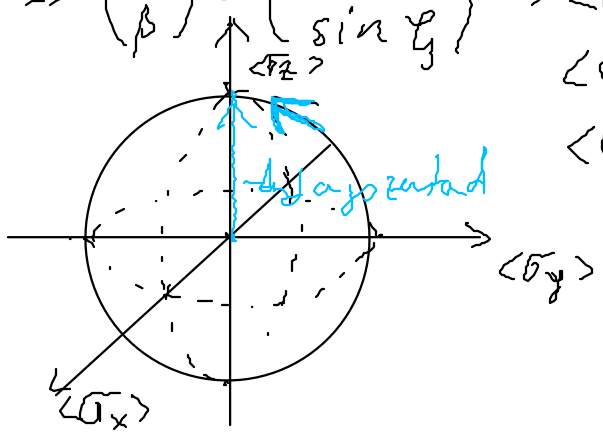
$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = (\mathbb{1} + i\sin(\zeta)\sigma_x)\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\zeta & i\sin\zeta\\ i\sin\zeta & \cos\zeta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}$$

Vereinfachung: $\beta_0 = 0$, $\alpha_0 = 1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\zeta\\ \sin\zeta\end{pmatrix} \Rightarrow \langle\sigma_z\rangle(t) = \cos(2\zeta) = \cos\left(\frac{g\mu B_x}{\hbar}t\right)$$

$$\langle\sigma_x\rangle(t) = 0$$

$$\langle\sigma_y\rangle(t) = \sin(2\zeta)$$



Drehung um die x-Achse

beliebiges α_0, β_0 Drehung um x-Achse

Allgemein: Drehung um Achse $\hat{u}$

$$R_{\hat u}(\alpha) = \exp\left[-i\alpha\frac{\vec S\cdot\hat u}{\hbar}\right] = \exp\left[-i\frac{\alpha}{2}\vec\sigma\cdot\hat u\right] = \cos\frac{\alpha}{2}\mathbb{1} - i\vec\sigma\hat u\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$R_{\hat u}(2\pi) = -\mathbb{1}, \quad R(4\pi) = \mathbb{1}, \quad \text{aber } A' = R_{\hat u}(2\pi)\,A\,R^\dagger_{\hat u}(2\pi) = A$$