$${}_0\langle \Psi_m | \Psi_n \rangle_1 = {}_0\langle m | -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{t} dt' \, \hat V_I(t') | n \rangle_0$$

$$= -\frac{1}{\hbar} \, {}_0\langle m | \hat V | n \rangle_0 \, \frac{e^{i(\omega_{nm} - \omega - i\varepsilon)t}}{\omega_{nm} - \omega - i\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \quad w_{f \leftarrow i} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | \hat V | i \rangle|^2 \, \delta(E_f^{(0)} - E_i^{(0)} - \hbar\omega)$$

2te Version der Herleitung

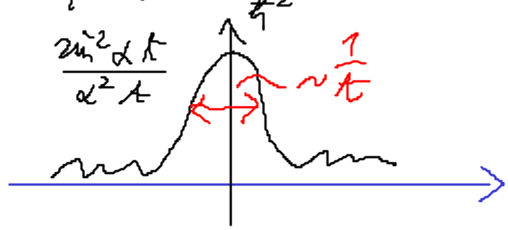
ab $t=0$ wirkt die Störung $\hat V(t) = \hat V e^{-i\omega t}$

$${}_0\langle \Psi_m | \Psi_n \rangle_1 = {}_0\langle m | -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \, \hat V_I(t') | n \rangle_0$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \exp\left(i(\omega_{nm} - \omega) t'\right) {}_0\langle m | \hat V | n \rangle_0$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \, {}_0\langle m | \hat V | n \rangle_0 \, \frac{\exp(i(\omega_{nm} - \omega)t) - 1}{i(\omega_{nm} - \omega)}$$

$$P^{(1)}_{m \leftarrow n} = |\ldots|^2 = \frac{1}{\hbar^2} |{}_0\langle m | \hat V | n \rangle_0|^2 \, \frac{\sin^2\left[(\omega_{nm} - \omega)\frac{t}{2}\right]}{(\omega_{nm} - \omega)^2 / 2^2 \cdot t} \cdot t$$



$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sin^2 \alpha t}{\alpha^2 t} = \pi \, \delta(\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t} P_{m \leftarrow n} = w_{m \leftarrow n} = \frac{2\pi}{\hbar^2} |{}_0\langle m | \hat V | n \rangle_0|^2 \, \delta(\omega_{nm} - \omega)$$

3.2 Spin-Dynamik

$$H = -g \frac{\mu}{\hbar} \vec S \cdot \vec B$$

$$\vec B = B e_z \quad \Rightarrow \quad H = -\frac{\hbar \omega_0}{2} \sigma_z$$

$$U(t,0) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t} = e^{\frac{i\omega_0 t}{2}\sigma_z}$$

$$|\psi(0)\rangle = \alpha_0 |+\rangle + \beta_0 |-\rangle$$

$$\Rightarrow \quad |\psi(t)\rangle = U(t,0) \, |\psi(0)\rangle$$

$$= \alpha_0 \exp\left(i \frac{\omega_0 t}{\hbar}\right) |+\rangle + \beta \exp\left(-i \frac{\omega_0 t}{\hbar}\right) |-\rangle$$

Kohärente Oszillation

$\vec{B} = B\,\vec{e}_x$

$\Rightarrow \quad U(t,0) = e^{i\zeta\sigma_x} = \cos\zeta + i\sin\zeta\cdot\sigma_x$ zeta

$$\zeta = \frac{g\mu}{2\hbar} B_x t$$

Rabi-Oszillation

Spin im statischen Feld, $B_0\vec{e}_z$

+ geeignet zirkular polarisiertes Wechselfeld in $x-y$ Richtung

$$\vec{B}(t) = B_0\vec{e}_z + B_1\left(\hat{e}_x\cos(\omega t) - \hat{e}_y\sin\omega t\right)$$

$$H = -\frac{g\mu}{\hbar}\vec{B}\cdot\vec{\sigma}$$

$$\simeq -\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z - \frac{\hbar\Omega_R^{(0)}}{2}\left(\sigma_x\cos\omega t - \sigma_y\sin\omega t\right)$$

(VZ falsch?)

$$\hbar\omega_0 = g\mu B_0$$

$$\hbar\Omega_R^{(0)} = g\mu B_1$$

Lösung gesucht $\quad i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)\,|\psi(t)\rangle$

$\Rightarrow$ Transformiere ins mitrotierende Bezugssystem

$$|\psi'(t)\rangle = U^+|\psi(t)\rangle \quad \text{mit} \quad U^+(t) = \exp\left(-i\frac{\omega t}{2}\sigma_z\right)$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi'\rangle = \left(i\hbar\frac{d}{dt}U^+\right)|\psi\rangle + U^+ i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle$$

$$= \cdots \qquad + U^+ H|\psi\rangle$$

$$= \left(i\hbar\frac{d}{dt}U^+\right)U\,U^+|\psi\rangle + U^+ H\,U\,U^+|\psi'\rangle$$

$$= H'|\psi'\rangle \qquad \text{mit} \quad H' = U^+ H U + i\hbar\left(\frac{d}{dt}U^+\right)U$$

mit $e^{-i\frac{\omega t}{\hbar}\sigma_z} \; \sigma_x \; e^{i\frac{\omega t}{\hbar}\sigma_z} = \cos(\omega t)\sigma_x + \sin(\omega t)\sigma_y$

$\sigma_y \qquad = \qquad y \qquad x$

$$H' = -\frac{\hbar}{2}(\omega_0 - \underbrace{\omega}_{\text{von } \left(\frac{d}{dt}U^+\right)U})\sigma_z - \frac{\hbar\Omega_R^{(0)}}{2}\Big[\cos^2(\omega t)\sigma_x + \sin(\omega t)\cos(\omega t)\sigma_y - \sin(\omega t)\cos(\omega t)\sigma_y + \sin^2(\omega t)\sigma_x\Big]$$

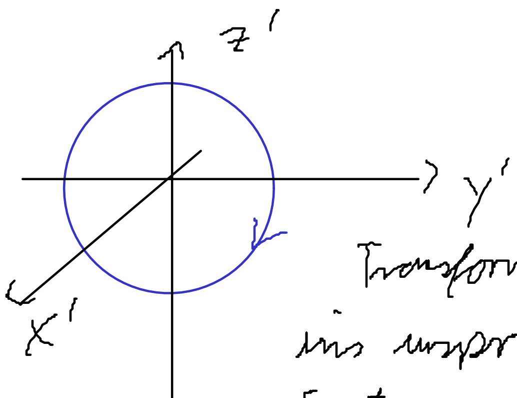
$$\Longrightarrow H' = -\frac{\hbar}{2}(\omega_0 - \omega)\sigma_z - \frac{\hbar\Omega_R^{(0)}}{2}\sigma_x$$

die ganze Zeitabhängigkeit ist wegtransformation

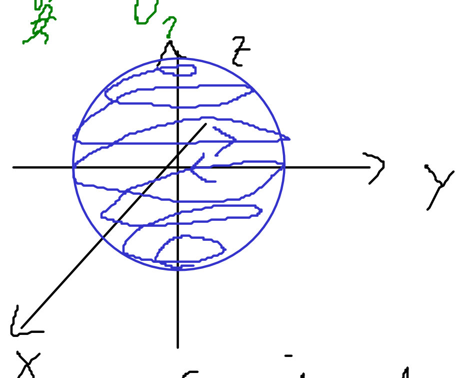
z.B. Resonanz $\omega = \omega_0 \Longrightarrow H' = -\frac{\hbar\Omega_R^{(0)}}{2}\sigma_x$

$\Rightarrow$ Drehung um x' Achse mit "Rabi-Frequenz" $\Omega_R^{(0)}$

$$\Omega_R^{(0)} = \frac{g\mu}{\hbar}B_2$$



Transformation ins ursprüngliche System



Spirale hoch und runter

Auf diese Weise kann man den Spin mit einem B-Feld den Spin drehen, da man genug Zeit hat, das B-Feld an und auszuschalten

Bem

1) Detuning (Verstimmung) $\Delta = \omega_0 - \omega \neq 0$

$$\Longrightarrow H' = -\frac{\hbar}{2}\Delta\sigma_z - \frac{\hbar\Omega_R}{2}\sigma_x \quad \text{zeitunabh.}$$

$$H'' = \tilde{U}^{+} H' \tilde{U} \qquad \tilde{U} = \begin{pmatrix} \cos\frac{x}{2} & \sin\frac{x}{2} \\ -\sin\frac{x}{2} & \cos\frac{x}{2} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\hbar\Omega_R}{2}\sigma_z \qquad \Omega_R = \sqrt{\Omega_R^{(0)\,2} + \Delta^2}$$

also im H'' System einfache Dynamik

2 Rücktransformationen nötig, um ins Laborsystem zu kommen

2) Angenommen, Wechselfeld B ist linear polarisiert (im Experiment einfacher)

$$H = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z - \frac{g\mu B_1}{2}\sigma_x \cos(\omega t)$$

Trafo ins rot. Bezugsystem

$$H' = -\frac{\hbar}{2}\Delta\sigma_z - \frac{g\mu B_1}{2}\left[\cos^2(\omega t)\,\sigma_x + \sin(\omega t)\cos(\omega t)\,\sigma_y\right]$$

"Rotating Wave Approximation" (Rotating Arms Approx)

$$= -\frac{\hbar}{2}\Delta\sigma_z - \frac{g\mu B_1}{4}\sigma_x$$

statisch

$$-\frac{g\mu B_1}{4}\left[\underbrace{(2\cos(\omega t) - 1)}_{\cos(2\omega t)}\sigma_x + 2\underbrace{\sin(\omega t)\cos(\omega t)}_{\sin(2\omega t)}\sigma_y\right]$$

oszilliert schnell, keine Resonanz

⇒ kleiner Effekt in RWA vernachlässigt

mit $\hbar\Omega_R^{(0)} = \frac{g\mu B_1}{2}$

Rabi Frequenz (Faktor 2 kleiner)

3) Drehung um y-Achse ? (Übung)

Bloch-Gleichungen

Übergang zur klassischen Beschreibung

$\vec{M} = \gamma \vec{S}$ $\qquad \gamma = \frac{gM}{\hbar}$ $\qquad \langle \vec{M} \rangle_T = ?$

$$H = -\gamma \vec{S} \vec{B}$$

Es gilt $\qquad i\hbar \frac{d}{dt} \langle \vec{S} \rangle = \langle [\vec{S}, \vec{H}] \rangle$

$$[S_x, H] = -\gamma [S_x, S_x B_x + S_y B_y + S_z B_z]$$

$[S_x, S_y] = i\hbar S_z$

$$= i\hbar \gamma [S_y B_z - S_z B_y]$$

$$= i\hbar \gamma (\vec{S} \times \vec{B})_x$$

$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \langle \vec{S} \rangle = \gamma \langle \vec{S} \rangle \times \vec{B}$

$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \langle \vec{M} \rangle = \gamma \langle \vec{M} \rangle \times \vec{B}$ $\quad \Rightarrow$ Larmorpräzession mit $\omega_0 = \gamma |\vec{B}|$

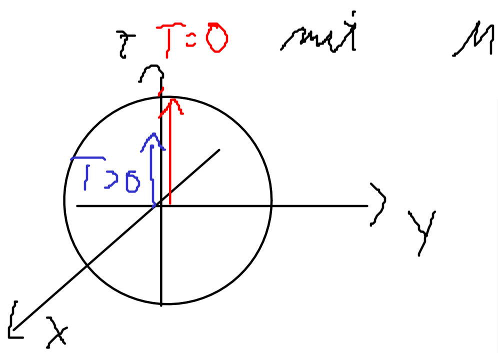
Ausblick: Für $\vec{B} = B_0 \hat{e}_z$ $\qquad$ Paramagnetismus

$$H = -\vec{M} \vec{B}$$

Temp

$\Rightarrow$ quanten + statistik $\Rightarrow \langle \vec{M} \rangle = M_0(T) \hat{e}_z$

mit $\quad M_0(T) = \gamma \frac{\hbar}{2} \tanh\left(\frac{\hbar \omega_0}{2 k_B T}\right)$



Relaxationsprozesse

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{M} \rangle = \underbrace{\gamma \langle \vec{M} \rangle \times \vec{B}}_{\text{kohärente Dynamik}} - \underbrace{\underbrace{\Gamma}_{\text{gamma}} (\vec{M} - M_0(T) \vec{e}_z)}_{\text{inkohärente Relaxion}}$$

$\Rightarrow$ Relaxation bis zum thermischen Mittelwert

$\Rightarrow$ Es stellt sich heraus, dass die z-Komponente und x-y Komponente verschieden schnell relaxieren

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle\vec{M}\rangle = \gamma\langle\vec{M}\rangle \times \vec{B}\vec{e}_z - \frac{1}{T_1}\left(\langle M_z\rangle - M_0\right)\vec{e}_z - \frac{1}{T_2}\left(\langle M_x\rangle\vec{e}_x + \langle M_y\rangle \vec{e}_y\right)$$