8.3 Zwei Spins

Betrachte 2 (unterscheidbare) Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen.

$\vec{S}^{(1)}$ und $\vec{S}^{(2)}$ $\quad s = \frac{1}{2} \quad m = \pm\frac{1}{2} \quad i = 1,2$

$[S^{(i)2}, S_z^{(i)}] = 0 \Rightarrow$ Eigenbasis $|s,m\rangle$

Notation $\quad S^{(i)2}|s\,m\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s\,m\rangle$

$|\frac{1}{2}\,m\rangle^{(i)} = |\mu\rangle^{(i)} \quad \mu = \pm \quad S_z^{(i)}|s\,m\rangle = \hbar m|s\,m\rangle$

$[S_\alpha^{(1)}, S_\beta^{(2)}] = 0 \quad \alpha,\beta = x,y,z$

$\Rightarrow \vec{S}^{(1)}$ und $\vec{S}^{(2)}$ haben gemeinsamen Satz von Eigenzuständen

$|\mu,\nu\rangle = |\mu\rangle^{(1)}|\nu\rangle^{(2)} \quad \mu,\nu = \pm$

4 Basiszustände $\quad |++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$, $|--\rangle$

- **wechselwirkende Spins** z.B.: $H = J\,\vec{S}^{(1)}\cdot\vec{S}^{(2)}$

Eigenzustände und Eigenwerte?

$|\mu,\nu\rangle$ stellen Basis dar

H dargestellt als 4×4 Matrix mit Matrixelementen $\langle\mu'\nu'|H|\mu\nu\rangle$

$$H = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&2&0\\0&2&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Eigenzustände und Eigenwerte:

3 Triplett (triplet) $\quad |T_+\rangle = |++\rangle$, $|T_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle)$, $|T_-\rangle = |--\rangle$

1 Singulett (singlet) $\quad |S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$

$E_{T_+} = E_{T_0} = E_{T_-} = J\frac{\hbar^2}{4}$, $E_S = -\frac{3}{4}J\hbar^2$

Entartung für $\vec{B}=0$, Grundzustand für $J>0$

- **Gesamtspin** $\vec{S} = \vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}$ z.B. mit Magnetfeld $H = J\vec{S}^{(1)}\cdot\vec{S}^{(2)} - \gamma(S_z^{(1)} + S_z^{(2)})B$

Aus den Eigenschaften von $\vec{S}^{(1)}$ und $\vec{S}^{(2)}$ folgt, dass aus $\vec{S} = \vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}$ ein Drehimpuls ist mit den Eigenschaften

$[S^2, S_z] = 0$, $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$ (zykl. Vert.)

$\Rightarrow$ Eigenzustand und Eigenwerte erfüllen $\quad S^2|SM\rangle = \hbar^2 S(S+1)|SM\rangle$

$S_z|SM\rangle = \hbar m|SM\rangle \quad S = ? \quad M = ?$

$\Rightarrow$ Konstruiere $|SM\rangle$ aus den Basiszuständen $|\mu\nu\rangle$

$$S^2 = S^{(1)2} + S^{(2)2} + 2\, S^{(1)} \cdot S^{(2)} = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2&0&0&0 \\ 0&1&1&0 \\ 0&1&1&0 \\ 0&0&0&2 \end{pmatrix} \qquad S=1 \quad M=\pm 1, 0$$

Eigenzustände sind wie der Triplett und Singulett

$|T_+\rangle = |11\rangle$

$|T_0\rangle = |10\rangle$

$|T_-\rangle = |1\,-1\rangle$

$|S\rangle = |00\rangle$

Mit Magnetfeld:

$E_{T_+} = J\frac{\hbar^2}{4} - \gamma\hbar B$

$E_{T_0} = J\frac{\hbar^2}{4}$

$E_{T_-} = J\frac{\hbar^2}{4} + \gamma\hbar B$

$E_S = -\frac{3}{4} J\hbar^2$

3.4 Eigenschaften von Verschränkten Zuständen

Singulett und Triplett-Zustände sind „verschränkte" Zustände d.h. sie können nicht als Produkt $|\psi\rangle^{(1)} \otimes |\varphi\rangle^{(2)}$ geschrieben werden.

Bei komplizierteren Vielteilchenzuständen ist es im Allg. Problem nachzuprüfen ob Zustand verschränkt ist.

Es gibt „Maße von Verschränkung"

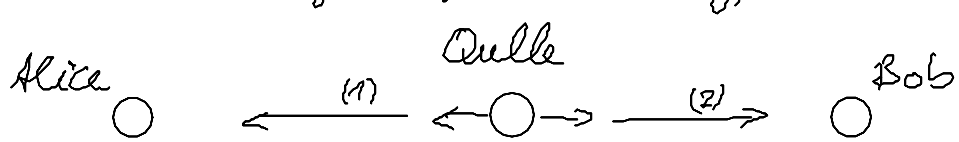
z.B. $|\psi\rangle = |+\rangle^{(1)} + |-\rangle^{(2)} + \varepsilon\left(|+\rangle^{(1)}|-\rangle^{(2)} - |-\rangle^{(1)}|+\rangle^{(2)}\right)$

für $\varepsilon \ll 1 \Rightarrow$ alle Messgrößen wie bei Produktzustand

Aber für ε größer, mehr und mehr verschränkt.

Einstein-Podolski-Rosen „Paradoxon"

Gedankenexperiment: Teilchen mit Spin 0 zerfällt in 2 Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen $\rightarrow$ Singlett (Spin erhaltung)



Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle^{(1)}|-\rangle^{(2)} - |-\rangle^{(1)}|+\rangle^{(2)}\right)$

Wenn Alice den Spin$^{(1)}$ misst und Ergebnis $+\frac{\hbar}{2}$ findet, dann ist der Zustand nach der Messung $|\psi\rangle = |+\rangle^{(1)}|-\rangle^{(2)}$, und Bob muss mit Sicherheit $-\frac{\hbar}{2}$ messen. (Beide haben $S_z^{(1)}$ gemessen)

$\Rightarrow$ Nichtlokalität

Bell'sche Ungleichungen (siehe Übungen)

Schrödingers Katze

Atom das zerfallen kann: Zustand $|e\rangle$ und $|g\rangle$, $\alpha(\infty)=0, \beta(\infty)=1$

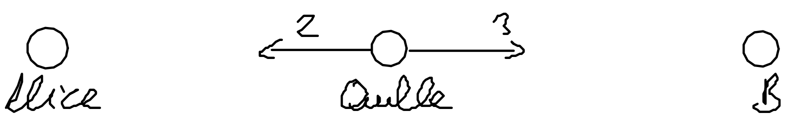
Katze $|lebt\rangle$ oder $|tot\rangle$ mit $|\alpha|^2+|\beta|^2=1, \alpha(0)=1, \beta(0)=0$

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha(t)|e\rangle|lebt\rangle + \beta(t)|g\rangle|tot\rangle\right)$ gibt es also schwer zu beobachten

Quantenteleportation

Ziel: teleportiere Zustand $|\phi_1\rangle$ instantan von A und B

$$|\phi\rangle_1 = a|+\rangle_1 + b|-\rangle_1$$



Zur Vorbereitung tauschen A und B einen EPR-Zustand (singlet) aus

$$|\psi\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_2|-\rangle_3 - |-\rangle_2|+\rangle_3\right)$$

Anfangszustand ist Produktzustand $|\phi_1\rangle|\psi\rangle_{23}$

$$|\phi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_{23} = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1|+\rangle_2|-\rangle_3 - |+\rangle_1|-\rangle_2|+\rangle_3\right)$$
$$\frac{b}{\sqrt{2}}\left(|-\rangle_1|+\rangle_2|-\rangle_3 - |-\rangle_1|-\rangle_2|+\rangle_3\right)$$

Teleportation wird durch eine Messung erzeugt. Und zwar hat Alice ein Gerät / Alice misst eine Observable mit Eigenwerten und Eigenvektoren

$$|\psi^\mp\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1|-\rangle_2 \mp |-\rangle_1|+\rangle_2\right) \qquad EW = \alpha, \beta$$
$$|\phi^\mp\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1|+\rangle_2 \mp |-\rangle_1|-\rangle_2\right) \qquad EW = \gamma, \delta$$

Wenn Alice den Wert α erhält dann ist

$$|\psi\rangle_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a|+\rangle_3 + b|-\rangle_3\right)$$

$$|\psi\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_2|-\rangle_3 - |-\rangle_2|+\rangle_3\right)$$

$$A = \alpha|\psi^-\rangle_{12}\,{}_{12}\langle\psi^-| + \beta|\psi^+\rangle_{12}\,{}_{12}\langle\psi^+| + \gamma|\phi^-\rangle\langle\phi^-| + \delta|\phi^+\rangle_{12}\,{}_{12}\langle\phi^+|$$

$$|\psi\rangle_{123} = |\phi_1\rangle \otimes |\psi\rangle_{23} = \dots$$
$$\begin{aligned} = \frac{1}{2}\Big\{ &- |\psi^-\rangle_{12} \otimes \left(a|+\rangle_3 + b|-\rangle_3\right) \\ &- |\psi^+\rangle_{12} \otimes \left(a|+\rangle_3 - b|-\rangle_3\right) \\ &+ |\phi^-\rangle_{12} \otimes \left(a|-\rangle_3 + b|+\rangle_3\right) \\ &+ |\phi^+\rangle_{12} \otimes \left(a|-\rangle_3 - b|+\rangle_3\right) \Big\} \end{aligned}$$