Kap IV Quantisierung des Strahlungsfeldes

4.1 Harmonische Oszillatoren

Wiederholung 1 HO in 1 dim.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 \qquad [p, x] = \frac{\hbar}{i}$$

def. $$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega x + ip) \Leftrightarrow p \propto i(a^+ - a)$$

$$a^+ = \;\text{''}\; (\;\text{''}\; - \;\text{''}\;) \Leftrightarrow x \propto (a^+ + a)$$

$$\Rightarrow H = \hbar\omega\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right) \;; \quad [a, a^+] = 1$$

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Aufsteigeoperator $a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

Absteigeoperator $a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n\rangle$

Heisenberg - Bild

$$a_H(t) = \exp\left(i\frac{H}{\hbar}t\right) a \exp\left(-i\frac{H}{\hbar}t\right) = a_H(0)e^{-i\omega t}$$

$$a_H^+(t) = \qquad = a_H^+(0)e^{i\omega t}$$

Kohärente Zustände (Übergang zur klass. Physik)

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \qquad \Bigg|\; |n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

Eigenzustand des Absteigeoperators $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

weitere Formen

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) e^{\alpha a^+}|0\rangle \;\stackrel{(*)}{=}$$

Baker - Hausdorff - Formel

$$[A, B] \neq 0 \qquad [[A,B],A] = [[A,B],B] = 0$$

$$e^{A+B} = e^{-\frac{[A,B]}{2}} e^A e^B$$

$(*) = e^{\alpha a^+ - \alpha^* a}\,|0\rangle$

Mehrere Oszillatoren

$$H = \sum_i \left(\frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} m \omega_i^2 x_i^2 \right), \quad [p_i, x_j] = \frac{\hbar}{i}\delta_{ij}$$

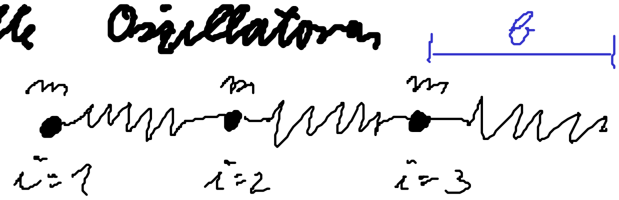
$$\Rightarrow \quad H = \sum_i \hbar\omega_i \left(a_i^+ a_i + \frac{1}{2} \right); \quad [a_i, a_j^+] = \delta_{ij}$$

(Die Oszillatoren sind unabhängig)

$\Rightarrow$ Zustand $|n_1, n_2, \dots, n_n\rangle = |n_1\rangle \otimes \dots |n_n\rangle$

Basis $= |\{n_i\}\rangle = \prod_{i=1}^{N} \frac{(a_i^+)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |0, 0, \dots, 0\rangle$

Gekoppelte Oszillatoren



b Gitterabstand

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \Omega^2 \sum_{\langle i,j \rangle} (x_i - x_j)^2$$

nächste Nachbarn

Ansatz:

Eigenmoden

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k x_k e^{ikjb}$$

k Wellenzahl / Vektor

$$p_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k p_k e^{ikjb}$$

(bei 1-dim)

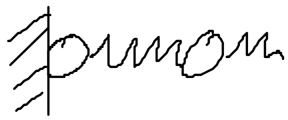
Umkehrung $x_k^* = x_{-k}$

$p_k^* = p_{-k}$

Einschub   Abzählen von Zuständen

$k = ?$

$\iff$ erlaubte Werte von k

Randbedingung : 

- feste Randbed. $x_{j=0} = x_{j=N} = 0$
- periodische Randbed. $x_{j=0} = x_{j=N}$

  bzw $x_j = x_{j+N}$

weiterhin : periodische Randbed.

$\iff$ **1)** $e^{ikNb} = 1 \iff kNb = 2\pi\nu$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

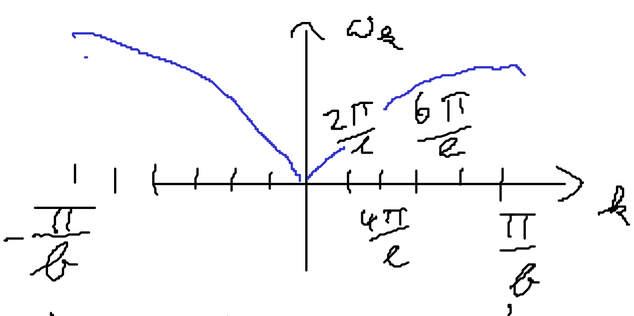
$e^{ik(j+N)b} = e^{ikjb}$ $k = \frac{2\pi}{Nb}\nu = \frac{2\pi}{\ell}\nu$

Nb = Länge des Systems

2) $|k|$ kann beschränkt werden auf die erste Brillouin-Zone $|k| \le \frac{\pi}{b}$

denn k und $k' = k + \frac{2\pi}{b}$ liefern das selbe Ergebnis (für k' wiederholt sich das ganze)

$$e^{ik'jb} = e^{ikjb} \cdot e^{i\frac{2\pi}{b}jb}$$



1. Brillouin-Zone

$\implies$ insgesamt N erlaubte k-Werte

Konsequenzen

$$\sum_k e^{ik(j-j')b} = \begin{cases} N & \text{für } j=j' \\ 0 & j \neq j' \end{cases} = N\delta_{j,j'}$$

k in verschiedene "Richtungen" $\Rightarrow$ Elem. heben sich gegenseitig weg

analog $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} e^{i(k-k')jb} = N\,\delta_{k,k'}$

Kontinuumsgrenzfall $b \to 0$

$$\sum_k \ldots \to \frac{1}{\Delta k}\int dk = \frac{L}{2\pi}\int dk$$

$\Delta k = \frac{2\pi}{L}$ ($\Rightarrow$ "Abzählen" über Zustände)

3-dim.

$$\sum_{\vec{k}} \ldots = \sum_{k_x k_y k_z} \longrightarrow \frac{L_x \cdot L_y \cdot L_z}{(2\pi)^3}\int d^3k$$

$$= V\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

$$\longrightarrow \sum_k e^{ikjb} \longrightarrow \sum_k e^{ikx}$$

$$\longrightarrow \frac{L}{2\pi}\int dk\, e^{ikx} = L\,\delta(x)$$

Ende Einschub

---

einsetzen

$$H = \sum_k\left(\frac{|P_k|^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_k^2\,|x_k|^2\right)$$

mit $\omega_k = 2\Omega\left|\sin\left(\frac{kb}{2}\right)\right| \approx c|k|$ "Schallgeschwind." für Phononen

für $|k|a \ll 1$

bzw. Lichtgeschwind. für Photonen

Quantisierung

$$[p_i, x_j] = \frac{\hbar}{i}\,\delta_{ij} \quad \Longrightarrow \quad [p_k, x^+_{k'}] = \frac{\hbar}{i}\,\delta_{kk'}$$

index i

komplex i

über k und nicht i, j

=> Eigenmoden sind wieder unabhängig von einander

definiere

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega_k}}\left(m\,\omega_k x_k + i p_k\right) \qquad x^+_k = x_{-k}$$

$$a^+_k = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega_k}}\left(m\,\omega_k x^+_k - i p^+_k\right)$$

$$H = \sum_k \hbar\omega_k \left(a^+_k a_k + \frac{1}{2}\right)$$

Abzählung über "Moden" und nicht über Gitterplätze

4.2 Das Strahlungsfeld

Maxwellgleichungen, keine Ladung, keine Ströme, im Vakuum (in CGS)

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad \nabla\cdot\vec{E} = 0$$

$$\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \qquad \nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$$

skalares und Vektorpotential

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

Coulomb Eichung $\quad \phi = 0 \qquad \vec{\nabla}\vec{A} = 0$

=> Wellengleichung $\quad \nabla^2\vec{A}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A = 0$

Energie $\quad \mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\,(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$

$$p = \frac{1}{4\pi c}\int d^3r\,(\vec{E}\times\vec{B})$$

Lösung der Wellengleichung

$$\vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\substack{\vec{k},\lambda \\ k\geq 0}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k}}\, \vec{e}_{\vec{k}\lambda} \left[\alpha_{\vec{k}\lambda} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega_k t)} - \alpha^*_{\vec{k},\lambda} e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega_k t)} \right]$$

$$\omega_k = c|\vec{k}|$$

$$\lambda = T_1, T_2 \quad , \quad \vec{e}_{k,\lambda} \cdot \vec{k} = 0$$

damit's reell wird,

dafür $k \geq 0$, sonst zählt man doppelt

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\substack{\vec{k},\lambda \\ k\geq 0}} \left(\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k}}\, \frac{\omega_k}{c}\, \vec{e}_{\vec{k}\lambda} \left[\alpha_{\vec{k}\lambda} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega_k t)} + \alpha^*_{\vec{k}\lambda} e^{-i(\ )} \right] \right)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\substack{\vec{k}\lambda \\ k\geq 0}} \sqrt{\cdots}\, \vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k}\lambda} \left[\alpha_{\vec{k}\lambda} e^{i()} + \alpha^*_{\vec{k}\lambda} e^{-i()} \right],$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \sum_{\vec{k}\lambda} \frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k} \Big[\underbrace{\frac{\omega_k^2}{c^2} \left(\alpha_{\vec{k}\lambda} \alpha^*_{\vec{k}\lambda} + \alpha^*_{\vec{k}\lambda} \alpha_{\vec{k}\lambda} \right)}_{\vec{E}^2} + \underbrace{k^2 (\cdots)}_{\vec{B}^2} \Big]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}\lambda} \hbar\omega_k \left(\alpha_{\vec{k}\lambda} \alpha^*_{\vec{k}\lambda} + \alpha^*_{\vec{k}\lambda} \alpha_{\vec{k}\lambda} \right)$$

auf / absteigoperatoren,

$\mathcal{E}$ sieht wie (*) aus