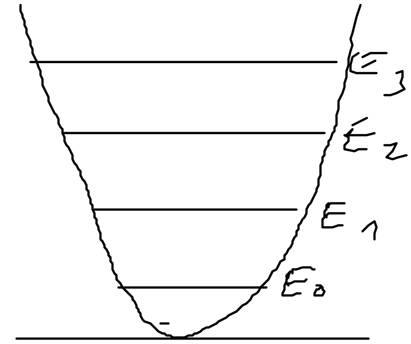
Kap IV Quantisierung des Strahlungsfeldes

4.1 Harmonische Oszillatoren



Wiederholung: 1. Osz. in 1dim

$$\boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2} \quad ; \quad [p, x] = \frac{\hbar}{i}$$

Def: $a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega x + ip) \qquad a^+ = \ldots$

$\Rightarrow p \propto i(a^+ - a) \quad ; \quad x \propto (a^+ + a)$

$H = \hbar\omega\left(a a^+ + \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad [a, a^+] = 1$

$H|n\rangle = E_n|n\rangle$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots \qquad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$

Aufstieg op. $a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

Abstieg op.: $a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \qquad \boxed{|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle}$

Heisenbergbild

$a_H(t) = e^{i\frac{Ht}{\hbar}}\, a\, e^{-i\frac{Ht}{\hbar}t} = a_H(0)\,e^{-i\omega t} \qquad a_H^+(t) = a_H^+(0)\,e^{i\omega t}$

Kohärente Zustände (Übergang zur klass. Physik)

$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$ Eigenzustand $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^+}|0\rangle \overset{\Uparrow}{=} e^{\alpha a^+ - \alpha^* a}|0\rangle$

Baker-Hausdorff-Formel

$[A, B] \neq 0 \qquad [[A, B], A] = [[A, B], B] = 0$

$e^{A+B} = e^{-\frac{[A,B]}{2}} e^A e^B$

Mehrere Oszillatoren

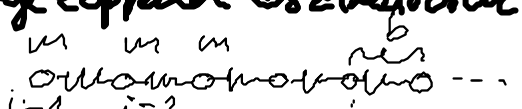
$$\boxed{H = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2}m_i\omega_i^2 x_i^2\right)} \qquad [p_i, x_j] = \frac{\hbar}{i}\delta_{ij}$$

$H = \sum_i \hbar\omega_i\left(a_i^+ a_i + \frac{1}{2}\right) \qquad [a_i, a_j^+] = \delta_{ij}$

Zustände $|n_1, n_2, \ldots n_N\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \ldots$

Basis $= |\{n_i\}\rangle = \prod_{i=1}^{N} \frac{(a_i^+)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}}|0, 0, \ldots 0\rangle$

Gekoppelte Oszillatoren



b = Gitterabstand

$N \cdot b = L$ Länge des Systems

$$\boxed{H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2 \sum_{\langle ij \rangle}(x_i - x_j)^2}$$

$\Uparrow$ nächste Nachbarn

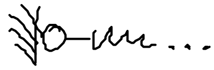
Eigenmoden $x_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k x_k e^{ikjb}$ Wellenvektor k (1-dim)

$p_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k p_k e^{ikjb}$

Umkehrung $\Rightarrow x_k^* = x_{-k}$ und $p_k^* = p_{-k}$

Einschub: Abzählen von Zuständen $k = ?$

Was sind erlaubte Werte von k

Randbedingungen: 

a) feste RB $\rightarrow x_{j=0} = x_{j=N} = 0$

b) Periodische RB $x_{j=0} = x_{j=N}$ / $x_j = x_{j+N}$ (wird i. Allg. weiterdiskutiert)

① $e^{ikNb} = 1 \Longrightarrow kNb = 2\pi\nu$ $\nu = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

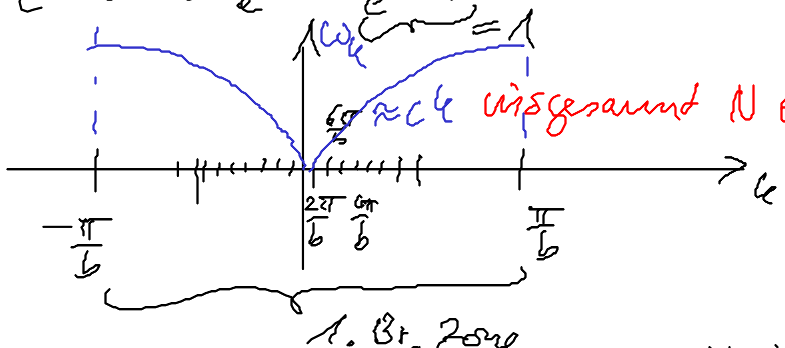
$e^{ik(j+N)b} = e^{ikjb}$

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{2\pi}{Nb}\nu = \frac{2\pi}{L} \cdot \nu}$$

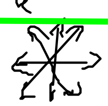
② k kann beschränkt werden auf „1. Brillouin Zone" $|k| \leq \frac{\pi}{b}$

denn k und $k' = k + \frac{2\pi}{b}$ liefert dasselbe

$e^{ik'jb} = e^{ikjb} \underbrace{e^{i\frac{2\pi}{b}jb}}_{=1}$



Konsequenzen $\boxed{\sum_k e^{ik(j-j')b}} = \begin{cases} N & j = j' \\ 0 & j \neq j' \end{cases} \boxed{= N\delta_{jj'}}$

zB 8 k-Werte: 

analog $\boxed{\sum_k e^{i(k-k')jb} = N\delta_{kk'}}$

- **Kontinuumsgrenzfall** $b \rightarrow 0$

$\sum_k \ldots \rightarrow \frac{1}{\Delta k} \int dk \ldots = \frac{L}{2\pi} \int dk \ldots$ $\Delta k = \frac{2\pi}{L}$

3dim: $\sum_{\vec{k}} \ldots = \sum_{k_x, k_y, k_z} \rightarrow \frac{L_x L_y L_z}{(2\pi)^3} \int d^3k \ldots = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$

$$\sum_k e^{ikjb} \rightarrow \sum_k e^{ikx} \rightarrow \frac{L}{2\pi}\int dk\, e^{ikx} = L\,\delta(x)$$
$= N\delta_{j,0}$

für $|k|b \ll 1$

ansehen: $H = \sum_k \left(\frac{|p_k|^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_k^2 |x_k|^2\right) \qquad \omega_k = 2\Omega\left|\sin\left(\frac{kb}{2}\right)\right| \approx c|k|$

c: Schallgeschw. bei Phononen

Quantisierung

$[p_i, x_j] = \frac{\hbar}{i}\delta_{ij} \Longrightarrow [p_k, x_{k'}^+] = \frac{\hbar}{i}\delta_{k,k'} \qquad x_k^+ = x_{-k}$

<u>definiere:</u>

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega_k}}(m\omega_k x_k + ip_k) \;;\; a_k^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega_k}}(m\omega_k x_k^+ - ip_k^+)$$

$$H = \sum_k \hbar\omega_k\left(a_k^+ a_k + \frac{1}{2}\right)$$

4.2 Das Strahlungsfeld (cgs-Einheiten)

- Maxwell Gl. ohne Quellen im Vakuum $\qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

$$\nabla\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = 0$$

- Skalar und Vektorpotential

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

- Coulombeichung $\phi = 0$, $\operatorname{div}\vec{A} = 0$

$\Rightarrow$ Wellengleichung $\nabla^2\vec{A}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = 0$

- Energie $\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\,(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$

$$\vec{p} = \frac{1}{4\pi c}\int d^3r\,(\vec{E}\times\vec{B})$$

- Lösung der Wellengleichung $\qquad \omega_k = c|\vec{k}|, \; n = T_1, T_2;\; \vec{e}_{\vec{k}n}\cdot\vec{k} = 0$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{-i}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k},n}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k}}\,\hat{e}_{\vec{k},n}\left(\alpha_{\vec{k},n}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega_k t)} - \alpha^*_{\vec{k},n}e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega_k t)}\right)$$

mit $k_z \geq 0 \qquad \alpha_{-kn} = \alpha^*_{kn}$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k},n}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k}}\,\frac{\omega_k}{c}\,\hat{e}_{\vec{k},n}\left(\alpha_{\vec{k}n}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega_k t)} + \alpha^*_{\vec{k}n}e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega_k t)}\right)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k},n}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k}}\left(\vec{k}\times\hat{e}_{\vec{k}n}\right)\left(\alpha_{\vec{k}n}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega_k t)} + \alpha^*_{\vec{k}n}e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega_k t)}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}\sum_{\vec{k},n}\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k}\left[\frac{\omega_k^2}{c^2}\left(\alpha_{\vec{k}n}\alpha^*_{\vec{k}n} + \alpha^*_{\vec{k}n}\alpha_{\vec{k}n}\right) + \vec{k}^2(\ldots)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}n}\hbar\omega_k\left(\alpha_{\vec{k}n}\alpha^*_{\vec{k}n} + \alpha^*_{\vec{k}n}\alpha_{\vec{k}n}\right)$$