$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k\lambda} \sqrt{\cdots}\ \frac{\omega_k}{c}\ \hat{e}_{k\lambda} \left(\alpha_{\vec{k}\lambda}\, e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega_k t)} + \alpha^*_{\vec{k}\lambda}\, e^{-i(\cdot\cdot)}\right)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k\lambda} \sqrt{\cdots}\ (\vec{k} \times \hat{e}_{\vec{k}\lambda})\left(\alpha_{\vec{k}\lambda}\, e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega_k t)} + \alpha^*_{\vec{k}\lambda}\, e^{-i(\cdot\cdot)}\right)$$

nicht nur $k > 0$

$\omega_k = c|\vec{k}|$

$$\sqrt{\cdots} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k}} & \text{cgs} \\ \sqrt{\dfrac{\hbar c^2}{2\varepsilon_0\omega_k}} & \text{SI} \end{cases}$$

$$\frac{1}{V}\int d^3r\, e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}\int d^3\vec{r}\ (E^2 + B^2)$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int d^3r \sum_{\substack{k\lambda \\ k'\lambda'}} \sqrt{\cdots_k}\,\sqrt{\cdots_{k'}}\ \frac{\omega_k}{c}\frac{\omega_{k'}}{c}\ \vec{e}_{k\lambda}\,\vec{e}_{k'\lambda'}\left(\alpha_{\vec{k}\lambda}e^{i()} + \alpha^*_{k\lambda}e^{-i()}\right)\left(\alpha_{k'\lambda'}e^{i()} + \alpha^*_{k'\lambda'}e^{-i()}\right)$$

wegen E^2 $+ \vec{B}^2$

mit $\frac{1}{V}\int d^3r\, e^{i(k+k')r} = \delta_{kk'}$ (k diskret)

mi e^{ik} kommt $k' = -k$ oder $-(k) = k'$

also doppelt ?

$$= \frac{1}{8\pi}\sum_{k\lambda} \frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k}\ \frac{\omega_k^2}{c^2}\Big\{\left(\alpha_{\vec{k}\lambda}\alpha^*_{\vec{k}\lambda} + \alpha^*_{k\lambda}\alpha_{k\lambda}\right) + \alpha_{k\lambda}\alpha_{-k\lambda}e^{-2i\omega_k t} + \alpha^*_{k\lambda}\alpha_{-k\lambda}e^{+2i\omega_k t}\Big\}$$

$$+ \frac{1}{8}\sum_{k\lambda}\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k}\, k^2 \Big\{\left(\alpha_{k\lambda}\alpha^*_{k\lambda} + \alpha^*_{k\lambda}\alpha_{k\lambda}\right) - \left(\alpha_{k\lambda}\alpha_{-k\lambda}e^{-()} + \alpha^*_{k\lambda}\alpha^*_{-k\lambda}e^{+()}\right)\Big\}$$

$(k \times e_{k\lambda})(k' \times e_{k\lambda})$ $k = k'$

$(k \times e_{k\lambda})(k' \times e_{k'\lambda})$ $k = -k'$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \sum_{k\lambda} \frac{2\pi c^2}{\omega_k} \left(\frac{\omega_k^2}{c^2} + k^2 \right) \left(\alpha_{k\lambda} \alpha^*_{k\lambda} + \alpha^*_{k\lambda} \alpha_{k\lambda} \right)$$

grüne Terme oben heben sich weg

$$\Longrightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{k\lambda} \hbar \omega_k \left(\alpha_{k\lambda} \alpha^*_{k\lambda} + \alpha^*_{k\lambda} \alpha_{k\lambda} \right)$$

Quantisierung (Hypothese)

ersetze $\alpha_{\vec{k}\lambda} \longrightarrow a_{\vec{k}\lambda}$ mit $[a_{k\lambda}, a^+_{k'\lambda'}] = \delta_{kk'}\delta_{\lambda\lambda'}$

$\alpha^*_{\vec{k}\lambda} \longrightarrow a^+_{\vec{k}\lambda}$

$$[a_{k'\lambda'}, a_{k\lambda}] = [a^+_{k'\lambda'}, a^+_{k\lambda}] = 0$$

$$\Longrightarrow \quad H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}\lambda} \hbar \omega_k \left(a_{\vec{k}\lambda} a^+_{\vec{k}\lambda} + a^+_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda} \right)$$

$$= \sum_{\vec{k}\lambda} \hbar \omega \left(a^+_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right)$$

Eigenzustände:

"Photonenzahlzustände"

$$|n_{k_1\lambda_1}, n_{k_2\lambda_2}, \dots\rangle = |\{n_{\vec{k}\lambda}\}\rangle$$

$$= \prod_{k,\lambda} \frac{(a^+_{k\lambda})^{n_{k\lambda}}}{\sqrt{n_{\vec{k}\lambda}!}} |0\rangle$$

$$E_{|\{n_{k\lambda}\}\rangle} = \sum_{\vec{k}\lambda} \hbar \omega_{\vec{k}\lambda} \left(n_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right)$$

Analog gilt $\quad p = \sum_{\vec{k}\lambda} \hbar \vec{k}\, a^+_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda}$

"Photonenzahloperator"

$$\hat{n}_{k\lambda} = a^+_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda} \qquad \left(\hat{n}_{k_0\lambda_0} |\{n_{k\lambda}\}\rangle = n_{k\lambda} |\{n_{k\lambda}\}\rangle \right)$$

4.3 Wechselwirkung von Atom und Strahlungsfeld

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right] + qU(\vec{r},t) + V(\vec{r})$$

$\frac{q}{c}$ wegen cgs — angelegtes ext. Feld — atomares Pot.

Für Elektron: $q = -|e|$

Eichtransformation (Kap. 3.13 Cohen Tannoudji)

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi(\vec{r}',t)$$

$$U \longrightarrow U' = U - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi(\vec{r},t)$$

$$\Rightarrow \quad \psi \longrightarrow \psi' = \psi(\vec{r},t)\exp\left(i\frac{q}{\hbar c}\chi(\vec{r},t)\right)$$

Phasenfaktor

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla U - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A} \\ i\hbar\frac{d}{dt}\psi &= H\psi \end{aligned}\right\} \text{ unverändert}$$

Strahlungseichung: $U = 0$, $\operatorname{div}\vec{A} = 0 \longleftrightarrow [\vec{p},\vec{A}] = 0$

Dipolnäherung: $\vec{A}(\vec{r},t) \approx \vec{A}(r_0,t)$

am Ort des Kerns

gilt, wenn Wellenlänge λ des Lichts sehr viel größer als Größe des Atoms

(Sichtbares Licht $\lambda \approx 10000$ Å)

$$\Rightarrow \quad H = H_0 + H_1$$

$$\left(H_0 = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) \quad \longrightarrow \text{Atomzustände}\right)$$

$$H_1 = -\frac{q}{cm}\vec{p}\,\vec{A}(\vec{r}_0,t) + \cancel{\frac{q^2}{2mc^2}\vec{A}^2}$$

Diamagnetismus schwach

andere Eichung (Name ?)

wähle $\chi = -\vec{A}(\vec{r}_0, t)\,\vec{r}$

$$\Rightarrow \quad \vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) - \vec{A}(\vec{r}_0, t) \approx 0$$

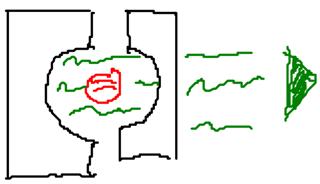
$$u' = \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}(\vec{r}, t)\cdot\vec{r} = -\vec{E}(\vec{r}_0)\,\vec{r}$$

$$\Longrightarrow \quad H_1 = -q\,\vec{E}(\vec{r}_0, t)\,\vec{r}$$

Zwei Zustands Atom

Oft sind wir an einer Resonanzsituation interessiert, wo Energieunterschiede des Atoms (zwischen 2 Zuständen) ΔE in Resonanz mit dem Strahlungsfeld sind

$$\Delta E \approx \hbar\omega_k$$

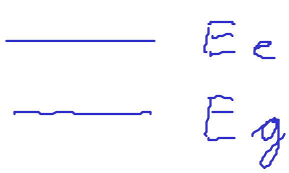


Cavity quantum electrodynamics

Dann "genügt" es nur die 2 Zustände des Atoms mitzunehmen.

z.B. Grundzustand $|g\rangle$ mit E_g

und ein angeregter Zustand $|e\rangle$ E_e



$$H_0^{\text{effektiv}} = E_g |g\rangle\langle g| + E_e |e\rangle\langle e| = \begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & E_e \end{pmatrix}$$

oft wird $E_g = 0$ gesetzt, dann $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_e \end{pmatrix}$

oder symmetrisch $E_g + E_e = 0 \Rightarrow H = -\frac{\hbar\omega_{eg}}{2}\sigma_z$

mit $\omega_{eg} = E_e - E_g = \Delta E$

WW mit Strahlungsfeld

$$H = -q\vec{r} \cdot E(\vec{r}_0, t)$$
$$= -\vec{E}\,(|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|)\, q\vec{r}\,(|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|)$$

Matrixelemente: $\langle g|\vec{r}|g\rangle = 0$

$\langle e|\vec{r}|e\rangle = 0$

aus Symmetriegründen

$$H = -\vec{E}\,(\vec{p}_{ge}\,|g\rangle\langle g| + \vec{p}_{eg}\,|e\rangle\langle e|)$$

mit $\vec{p}_{ge} = \langle g|q\vec{r}|e\rangle = \vec{p}_{eg}^{\,*}$ Dipolmatrixelement

$$\Rightarrow \quad H_1 = -\begin{pmatrix} 0 & \vec{p}_{ge}\vec{E} \\ \vec{p}_{ge}^{\,*}\vec{E} & 0 \end{pmatrix}$$

Wechselwirkung jetzt mit klass. $\vec{E}$-Feld oder QM-Feld?

klass. el. Feld

z.B. $\vec{E}(t) = E_0\,\hat{e}_x \cos(\omega t)$ mit $\hbar\omega \approx \hbar\omega_{eg}$

$\Rightarrow$ Rabi Oszillation (verwende RWA)

erlaubt das Atom in kontrollierter und kohärenter Weise z.B. vom Grundzustand in Superposition und den angeregten Zustand (und zurück) drehen.

Atom im QM - Strahlungsfeld

$$H = H_0 + H_F - q\vec{r}\,\vec{E}(\vec{r}_0)$$

$$H_0 = -\frac{\hbar\omega_{ge}}{2}\,\sigma_z$$

$$H_F = \sum_{k\lambda} \hbar\omega_k \left(a^+_{k\lambda}\, a_{k\lambda} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k,\lambda} \sqrt{2\pi\hbar\omega_k}\; \hat{e}_{\vec{k}\lambda}\left(a_{k\lambda} + a^+_{k\lambda}\right)$$

Schrödinger Bild

$\Rightarrow e^{i\omega_k t}$ verschwindet

außerdem $e^{\pm i\vec{k}\vec{r}_0}$ Phasenfaktor / kann man wegeichen

mit $\vec{p}_{eg} = \vec{p}_{ge}$ reell

$$\Rightarrow H_1 = -p_{ge}\left(|g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g|\right) \sum_{k\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}}\; \hat{e}_{k\lambda}\left(a_{k\lambda} + a^+_{k\lambda}\right)$$

$$= \hbar \sum_{k\lambda} g_{k\lambda}\, \sigma_x \left(a_{k\lambda} + a^+_{k\lambda}\right)$$

mit

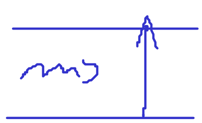
$$g_{k\lambda} = -\vec{p}_{ge}\, \hat{e}_{k\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}}\; \frac{1}{\hbar}$$

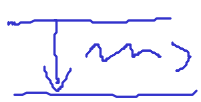
(Kopplung von Spin-System und HO)

$$\sigma_x = \sigma_+ + \sigma_- \qquad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\sigma_+|g\rangle = |e\rangle \qquad \sigma_-|e\rangle = |g\rangle$

$$\Rightarrow \sigma_x(a + a^+) = \sigma_+ a + \sigma_- a^+ + \sigma_+ a^+ + \sigma_- a$$

$\sigma_+ a$  Photon vernichten, Atom anregen

$\sigma_- a^+$ 

was ist mit $\sigma_- a$ oder $\sigma_+ a^+$??

Das wird in der RWA vernachlässigt.