Atom im quantenmechanischen Strahlungsfeld

$$H = H_A + H_F + H_{int}$$

$$H_A = \sum_\alpha E_\alpha \, |\alpha\rangle\langle\alpha| \longrightarrow -\frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\sigma_z$$

$\alpha = g, e$ 2 Niveau-Atom

$$H_F = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega_k \left(a^+_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2}\right)$$

$$H_{int} = -q\vec{r}\,\vec{E}(\vec{r}) \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}}\,\hat{e}_{k\lambda}\left(a_{k\lambda}e^{ikr} + a^+ e^{-ikr}\right)$$

oder $-\frac{q}{mc}\,\vec{p}\,\vec{A}(\vec{r})$

es gilt $\omega_k = c|\vec{k}|$ $\hat{=}$ "Farben"

"Photonenzustand" $|n_{k_1\lambda_1}, n_{k_2\lambda_2}, \dots\rangle = \prod_{\vec{k}\lambda} \frac{\left(a^+_{\vec{k}\lambda}\right)^{n_{k\lambda}}}{\sqrt{n_{k\lambda}!}}|0\,0\dots\rangle$

"Anzahl der Photonen einer Farbe"

Dipolnäherung

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|} \gg a_0$$

(Bohrscher Radius)

$\Rightarrow$ nur $E(\vec{r}_0)$, (E homogen = räumlich konst.)

oBdA $r_0 = 0$

$$H = -\frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\sigma_z + \sum_{\vec{k}\lambda}\hbar\omega_k\left(a^+_{k\lambda}a_{k\lambda} + \frac{1}{2}\right)$$

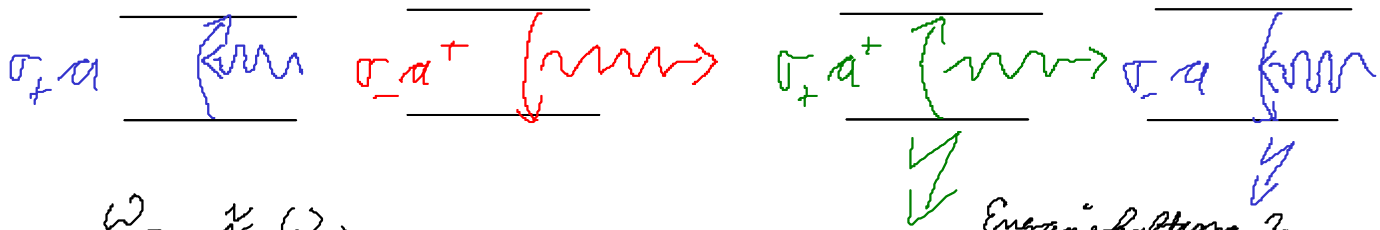
$$+\hbar\sum_{\vec{k}\lambda} g_{k\lambda}\sigma_x\left(a_{k\lambda} + a^+_{k\lambda}\right)$$

$$\hbar g_{k\lambda} = -\vec{p}\,\hat{e}_{\vec{k}\lambda}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} \qquad \vec{p}_{eg} = \langle e|q\vec{r}|g\rangle$$

RWA (Rotating Wave Approx.)

$$\sigma_x (a + a^\dagger)$$
$$= \sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger + \sigma_+ a^\dagger + \sigma_- a$$

$$\sigma_x = \sigma_+ + \sigma_-$$
$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\omega_{eg} \approx \omega_{\vec{k}}$$

Energieerhaltung?

nie in Resonanz $\Rightarrow$ vernachlässigbar

$$\Rightarrow \quad H = -\frac{1}{2}\hbar \omega_{eg} \sigma_z + \sum_{\vec{k}\lambda} \hbar \omega_k \left(a^\dagger_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right)$$
$$+ \hbar \sum_{\vec{k}\lambda} g_{\vec{k}\lambda} \left(\sigma_+ a_{\vec{k}\lambda} + \sigma_- a^\dagger_{\vec{k}\lambda} \right)$$

Übergangsrate P

mit goldener Regel

(Übung)

$P_{g \to e}$ Atom

$n+1 \longrightarrow n$ Photonen

$P_{e \to g}$

$n \longrightarrow n+1$

klassisch $\quad P_{e \to g} = P_{g \to e}$

$$\underset{n \longrightarrow n+1}{\Gamma_{e \to g}} \neq \underset{n+1 \longrightarrow n}{\Gamma_{g \to e}}$$

"n" für Photonenzustand $\quad |n_{\vec{k}_1\lambda_1}, n_{\vec{k}_2\lambda_2}, \ldots\rangle$

"$n+1$" $= |n_{\vec{k}_1\lambda_1}, n_{\vec{k}_2\lambda_2}, \ldots, (n+1)_{\vec{k}_i\lambda_i}, \ldots\rangle$

$\hookrightarrow$ passendes k

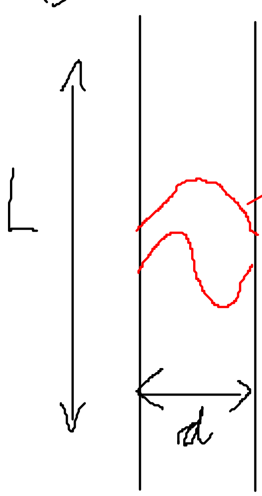
QM: Berücksichtige auch Übergang im Strahlungsfeld

* → $\sum_{\vec{k}\lambda} \hbar \omega_k \cdot \frac{1}{2} = \infty = E_{vac}$

keine Photonen

⇒ ist zwar ∞, definiert den Energienullpunkt, kann ignoriert werden.

ABER: E_{vac} ändert sich, wenn sich das Volumen ändert ⇒ **Casimir-Kräfte**



Strahlungsfeld dazwischen eingeschlossen

$\vec{k} = \frac{\nu \pi}{d}$ $\quad \nu = 1, 2, \ldots$

in y, z-Richtung ebene Wellen

$$E_{vac} = \hbar c L^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \int \frac{dk_y}{2\pi} \int \frac{dk_z}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\nu\pi}{d}\right)^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

$$F = \frac{\partial}{\partial d} E_{vac}(d) = -\frac{\pi^2 \hbar c L^2}{240 d^4}$$

anziehende Kraft

nach genügender Regularisierung

≙ Berücksichtigung des Außenbereichs

wurde gemessen

Lamb-shift

Beobachtung: für das H-Atom ist $H_{2s} \neq H_{2p}$

obwohl es gleich sein sollte

Störungstheorie in 2. Ordnung

Ursprünglich $T = 0$, keine Photonen

$$\delta E_\alpha = \sum_{\beta, \vec{k}, \lambda} \frac{\langle \alpha 0 | H_{int} | \beta 1_{k\lambda} \rangle \langle \beta 1_{k\lambda} | H_{int} | \alpha 0 \rangle}{E_\alpha - E_\beta}$$

"$1_{k\lambda}$" $= n_{k\lambda} = 1$ ein Photon angeregt

verwende

$$H_{int} = -\frac{q}{mc} \vec{p} \cdot \vec{A}$$

$\delta E_\alpha = \infty$ schon wieder ...

zmal Problem: Bethe sagt: führe cut-off ein

d.h. es klappt wieder

$$\Longrightarrow \quad \delta E_\alpha = -\frac{2 q^2 \omega_c}{3 \pi m^2 c^3} \vec{p}^{\,2}$$ führender divergenter Teil nun regularisiert

(β auf 2-Schale eingeschränkt (2s und 2p))

$$\Longrightarrow \quad \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \delta E_\alpha = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + C \vec{p}^{\,2}$$ sieht aus wie renormierte Masse ??

hängt ab vom cut-off ??

Lösung: Die Korrektur ist immer vorhanden, die Beob. Masse enthält diese Korrektur immer.

$\leadsto$ in die def. von m stecken.

Rechne daher $\delta E_\alpha + C \langle \alpha | \vec{p} | \alpha \rangle$ aus

Dies ist "Regulär", diese Größe hängt von ω_{cutoff} nur noch logarithmisch ab (schwache Abhängigkeit)

$$\Longrightarrow \quad \frac{\delta E_\alpha^{obs.}}{\hbar 2\pi} \approx 1040 \text{ MHz} \;\hat{=}\; \frac{E_{2s} - E_{2p}}{\hbar\, 2\pi}$$

Jenseits der Dipolnäherung

$\Rightarrow$ „elektrische Dipolübergänge"

entwickle $e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_0)}$

$\Rightarrow$ Quadrupol und magn. Übergänge

Lichtstreuung

$$|\alpha\, 1_{\vec{k}\lambda}\rangle \longrightarrow |\beta\, 1_{\vec{k}'\lambda'}\rangle$$

könnte hier diskutiert werden

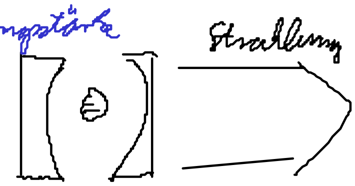
4.4. Jaynes-Cummings-Modell

Ein 2 Niveau-Atom WW mit 1 Mode Strahlungsfeld

nahe Resonanz, RWA

$$H = -\frac{\hbar\omega_{eg}}{2}\sigma_z + \hbar\omega a^+a + \overbrace{\hbar \underset{\text{Kopplungsstärke}}{g}(\sigma_+ a + \sigma_- a^+)}^{H_{int}}$$

$+\frac{1}{2}$ weggelassen da Raumkonst.



QED

Eigenwertproblem

Basis: $|g, n\rangle \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

$|e, n\rangle \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

Die einzigen nicht verschwindenden Terme

$$\langle e\, n | H_{int} | g\, n+1\rangle = \hbar g\sqrt{n+1}$$
$$\langle g\, n+1 | H_{int} | e\, n\rangle = \hbar g\sqrt{n+1}$$

$$|g,0\rangle,\ |e,0\rangle,\ |g,1\rangle,\ |e,1\rangle, \ldots$$

$$H = \hbar \begin{pmatrix} \boxed{-\frac{\omega_{eg}}{2}} & 0 & & & \\ 0 & \frac{\omega_{eg}}{2} & g & & \\ & g & -\frac{\omega_{eg}}{2}+\omega & & \\ & & & \frac{\omega_{eg}}{2}+\omega & \sqrt{2}\,g \\ & & & \sqrt{2}\,g & -\frac{\omega_{eg}}{2}+2\omega \end{pmatrix}$$

Block $\nu = 1$

$\nu = 2$

Diagonalisieren:

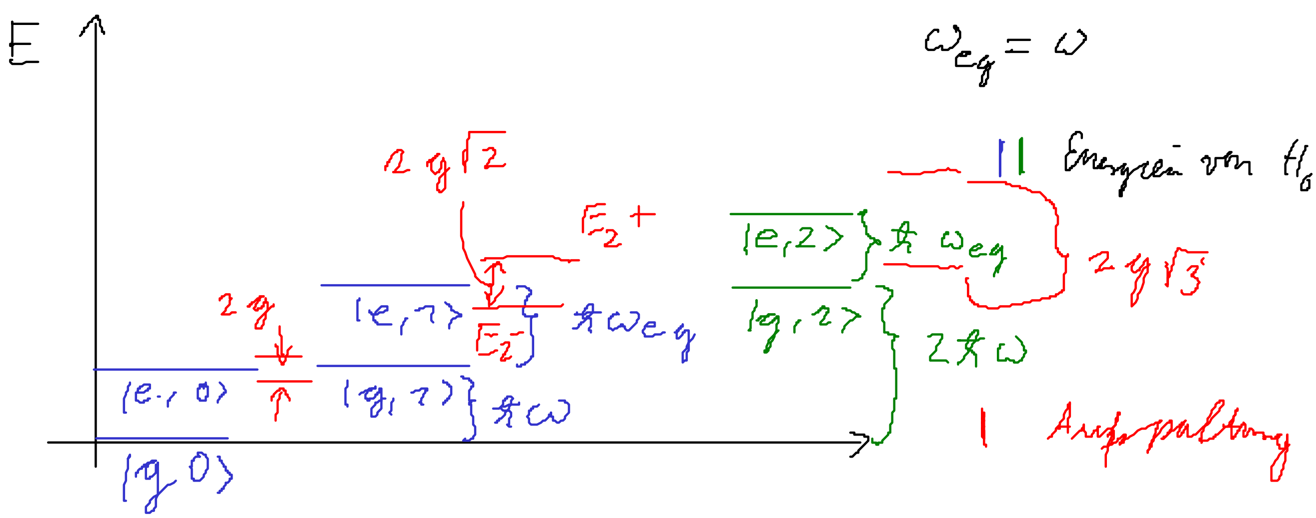
$$E_0 = -\frac{\hbar\,\omega_{eg}}{2} \qquad |0\rangle = |g,0\rangle$$

Block ν $\qquad \nu = 1, 2, \ldots$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\omega_{eg}}{2} + (\nu-1)\omega - \frac{E}{\hbar} & \sqrt{\nu}\,g \\ \sqrt{\nu}\,g & -\frac{\omega_{eg}}{2} + \nu\omega - \frac{E}{\hbar} \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow E_{\nu\,\mp} = \hbar\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\omega \mp \frac{1}{2}\hbar\,\Omega_\nu$$

$$\Omega_\nu = \sqrt{4g^2\nu + (\omega_{eg}-\omega)^2}$$



Charakteristische Energieaufspaltung $\sim 2g\sqrt{\nu}$

"Vacuum Rabi Splitting", Nachweis (2004)