Literatur: Schwabl Band 2

Kap VI Relativistische Quantenmechanik

6.1 Klein-Gordon Gleichung

$p \longrightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla \qquad E \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

für freies Teilchen: $E = \frac{p^2}{2m}$

Wellengleichung: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r},t)$

Relativitätstheorie $E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^{\,2}}$

für $m=0$: $E = c|\vec{p}|$

wenn $v \ll c$: $E = mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$

Lorentz-Transformation (statt Galilei) mischt Ort und Zeit

Def: 4er-Vektor $x^\mu = (ct, x^1, x^2, x^3)$ $\mu,\nu = 0,1,2,3$

$x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z \qquad i,j,k = 1,2,3$ (Raumdim)

- kontravarianter 4er-Vektor x^μ
- kovarianter 4er-Vektor $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$
- metrischer Tensor $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- 4er-Impuls $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ $\quad p_\mu p^\mu = g_{\mu\nu}p^\nu p^\mu = p^{0\,2} - \vec{p}^{\,2} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m^2c^2$

mit Einsteinscher Summenkonvention, über wiederholte Indizes wird summiert

$\rightarrow$ Lorentztransformation zwischen Inertialsystem I und I', die sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ relativ zueinander bewegen.

$$\boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu + a^\mu}$$ Matrix, linear, mischt Ort + Zeit

relativistische Wellengleichung?

$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \cancel{\sqrt{m^2c^4 - c^2\hbar^2\vec{\nabla}^2}\,\psi(\vec{r},t)}$ zu kompliziert

$$\boxed{-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\vec{r},t) = \left(-\hbar^2c^2\vec{\nabla}^2 + m^2c^4\right)\psi(\vec{r},t)}$$ Klein-Gordon Gl.

2. Ordnung Dgl in Zeit

$\Leftrightarrow$ man braucht 2 Anfangsbed. (für ψ und $\dot{\psi}$)

Def: $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu},\ \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(x) = 0$$ • Längenskala $\frac{\hbar}{mc}$ = Comptonwellenlänge

$$\boxed{\left(\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\psi(x) = 0}$$

• d'Alembert Operator $\partial_\mu \partial^\mu = \Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$

$\Box$ ist invariant unter Lorentz-Trafo. (so war L. Trafo definiert)

• Oft verwenden wir Einheiten mit $\hbar = 1$, $E = \omega$, $[E] = [\text{Zeit}]^{-1}$ oder $c = 1$, auch $k_B = 1$, $E = T$

$$\Rightarrow \boxed{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\psi(x) = 0}$$

Nicht zu verwechseln mit den Arbeiten, wo $\hbar = c = k_B = 1, = -1, = 2, = \pi$

• Klein-Gordon Gleichung enthält keinen Spin, gilt für relativistische spinlose Teilchen z.B Pionen und Higgs-Teilchen.

Kontinuitätsgleichung

$$0 = \psi^*\left(\partial_\mu\partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\psi - \psi\left(\partial_\mu\partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\psi^*$$
$$= \psi^*(\partial_\mu\partial^\mu)\psi - \psi(\partial_\mu\partial^\mu)\psi^*$$
$$= \partial_\mu(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right) + \vec{\nabla}\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right) = 0$$

$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}\vec{j} = 0$ mit $\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)$

aber $\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right) \neq |\psi|^2$

• ρ ist nicht positiv definit, also nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte definierbar

• Aber $q\rho$ = Ladungsdichte

• Gleichung enthält auch Antiteilchen, da es beide Vorzeichen O.K.

Freie Lösung der Klein-Gordon Gl. mit $E^2 - c^2p^2 = m^2c^4$

$\psi(x) = \psi(\vec{x}, t) = \exp\left[i\frac{(Et - \vec{p}\vec{x})}{\hbar}\right]$ $\qquad E = \pm\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$

• positive und negative Energie als Lösung $\to$ Teilchen und Antiteilchen

6.2 Dirac-Gleichung

Bedingungen

① relativistisch $E^2 = c^2p^2 + m^2c^4$

② Es existiert ein 4er-Strom mit $j^0 \propto \rho$ und ρ positiv def. WS-Dichte

③ Die Gleichung muss "Lorentz-kovariant" sein, d.h. invariant unter Lorentz-Trafo

Versuch: komme mit 1. Ordnung Zeit und Ortsableitung aus

Dirac: $\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left(\frac{\hbar c}{i} \alpha^k \partial_k + \beta m c^2\right) = H\psi}$ (noch zu zeigen)

mit $N \times N$ Matrizen α^k, β und ψ ist N-komponentiger "Spinor"

① $-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = -\hbar^2 c^2 \sum_{i,j=1}^{3} \frac{1}{2} (\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i) \partial_i \partial_j \psi$

(2-fache Anwendung von H) $+ \frac{\hbar m c^3}{i} \sum_{i=1}^{3} (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) \partial_i \psi$

$+ \beta^2 m^2 c^4 \psi$

- Erfüllt $E^2 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4$ für $\beta^2 = \mathbb{1}$, $\alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0$, $\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 0$ für $i \neq j$
  $(\alpha^i)^2 = \mathbb{1}$
- Es muss gelten α^i und β sind hermitesch

Beispiel: 2-Raumdimensionen

Dann wäre eine Lösung $\underbrace{\alpha^1 = \sigma_x, \alpha^2 = \sigma_y, \beta = \sigma_z}_{\text{oder gedrehte Variante}}$

$\sigma_i^2 = \mathbb{1}$, $\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i$

aber für 3-Raumdim fehlt 4. Paulimatrix

Weitere Eigenschaften der α^i und β

- $\alpha^i = -\beta \alpha^i \beta$, $Sp(\alpha^i) = Sp(\beta \alpha^i \beta) = -Sp(\alpha^i \beta^2) = -Sp(\alpha^i)$
  $\Rightarrow Sp(\alpha^i) = 0$
- $(\alpha^i)^2 = \mathbb{1} \Rightarrow$ Eigenwerte nur ± 1
  $\Rightarrow$ minimales $N = 4$

Standard Darstellung $\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$ $\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$ $\sigma^i = \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$

- Übungsaufgabe: zz dass α^i und β Bedingungen erfüllen.
  (gedrehte Darstellungen sind auch möglich)

Kontinuitätsgl. $\psi^+ = (\psi_1^*, \psi_2^*, \dots \psi_N^*)$

$i\hbar \psi^+ \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{\hbar c}{i} \psi^+ \alpha^i \partial_i \psi + m c^2 \psi^+ \beta \psi$

$-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi^+\right) \psi = -\frac{\hbar c}{i} (\partial_i \psi^+) \alpha^{i+} \psi + m c^2 \psi^+ \beta^+ \psi$ ⊖

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\psi^+ \psi) = -c\left((\partial_i \psi^+) \alpha^{i+} + \psi^+ \alpha^i \partial_i \psi\right) + \frac{i m c^2}{\hbar} \psi^+ (\beta^+ - \beta) \psi$

für $\beta^+ = \beta$, $\alpha^{i+} = \alpha^i$ mit $\rho = \psi^+ \psi$ und $j^i = c \psi^+ \alpha^i \psi$