$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \Big(\underbrace{\frac{\hbar c}{i}\alpha^k \partial_k}_{= -\alpha^k p_k} + \beta m c^2\Big)\psi$$

kompakte Notation

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) \qquad x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu \qquad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$p^\mu = i\hbar\partial^\mu = \left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}, i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k}\right)$$

$$= \left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

$$p_\mu = \dots = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right)$$

Kopplung an el. mag. Feld / minimale Ergänzung

$$\vec{p} \to \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$$ letztes mal VZ-Fehler

also $p^k \longrightarrow p^k - \frac{e}{c}\vec{A}$, $(A^1 = A_x, \dots)$

$$p_k \longrightarrow p_k - \frac{e}{c}A_k \qquad (A_1 = -A_x, \dots)$$

$$\rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-c\,\alpha^k\left(p_k - \frac{e}{c}A_k\right) + \beta m c^2 + e\phi\right)\psi$$

$$\Rightarrow \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi - c\,\alpha^k\left(i\hbar\partial_k - \frac{e}{c}A_k\right) + \beta m c^2\right)\psi = 0$$

$$\left[-\beta\left(i\hbar\partial_0 - \frac{e}{c}\phi\right) - \beta\alpha^k\left(i\hbar\partial_k - \frac{e}{c}A_k\right) + \beta^2 m c\right)\psi = 0$$

$$\beta^2 = \mathbb{1}, \quad \beta = \gamma^0, \quad \beta\alpha^k = \gamma^k$$

def. $A_\mu = (\phi, A_k)$

$$\Rightarrow \left[-\gamma^\mu\left(i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right) + mc\right]\psi = 0$$

Hier sieht man: Dirac-Gleichung ist invariant unter

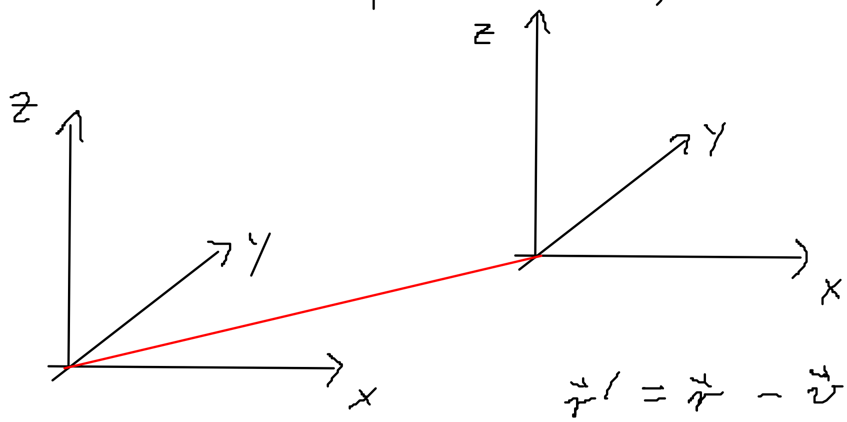
Eichtransformation $A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x)$

$$\psi(x) \longrightarrow e^{-i\frac{e}{\hbar c}\alpha(x)}\,\psi(x)$$

6.4 Lorentz - Transformation

– Galilei - TraFo

2 Beobachter in Inertialsystem I und I' die sich mit $\vec{v}$ relativ zueinander bewegen beobachten das selbe Ereignis bei $\vec{r}, t$ (passive TraFo)



bei $t = 0$ sind Koord. Systeme gleich

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t \qquad \dot{\vec{x}}\,' = \dot{\vec{x}} + \vec{v}$$
$$t' = t$$

Geschwind. addieren sich

– Lorentz - Transformation

spez. Relativitätstheorie: c in allen Inertialsystemen gleich (Beobachtung)

$$\rightarrow \underbrace{X'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu X^\mu}_{\text{linear}} + \underbrace{a^\mu}_{\text{inhomogen}}$$

lineare, inhomogene LT

Bedingung: Wellengleichung muss invariant unter LT sein.

$\Leftrightarrow$ der d'Alembert - Operator $\Box$ ist invariant unter LT

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^{i\,2}} = \partial_\mu \partial^\mu$$
$$= g^{\mu\nu}\partial_\mu \partial_\nu$$

Transformation $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} = \Lambda^\lambda{}_\mu \partial'_\lambda$

$$\Rightarrow \partial_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu = \Lambda^\lambda{}_\mu \partial'_\lambda g^{\mu\nu} \Lambda^\rho{}_\nu \partial'_\rho$$

$$\overset{!}{=} \partial'_\lambda g^{\lambda\rho} \partial'_\rho$$

Invarianz

erfordert $\Lambda^\lambda{}_\mu g^{\mu\nu} \Lambda^\rho{}_\nu = g^{\lambda\rho}$

- $\Leftrightarrow \Lambda g \Lambda^T = g$
- $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu$ Reihe ?: nicht $\Lambda_\mu{}^\nu$
- $\det(\Lambda g \Lambda^T) = \det g = \det \Lambda \det g \det \Lambda^T$

$$\Rightarrow (\det \Lambda)^2 = 1$$

also $\det \Lambda = \pm 1$

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{k=1}^{3} (\Lambda^0{}_k)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1 \quad \text{also} \quad (\Lambda^0{}_0) = \begin{cases} \geq 1 \\ \leq -1 \end{cases}$$

für $v \ll c$ soll LT in Galileo-Transformation übergehen.

Beispiele

1) Boost in x-Richtung mit Geschwind. v

def. $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$a^\mu = 0 \quad \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

also $$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \xrightarrow[v \ll c]{} t - \cancel{\frac{v}{c^2}t} \quad \sigma^2$$

$$x' = \gamma(x - vt) \xrightarrow[v \ll c]{} x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

reduziert sich auf Galilei-Trafo

erfüllt $\Lambda g \Lambda^T = g$ (Übungsaufg.)

$$\det \Lambda = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$$

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma \geq 1$$

äquivalent

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\cosh\eta = \gamma \leftrightarrow \tanh\eta = \beta$

η heißt Rapidität (Rapiditäten addieren sich, anders als Geschwindigkeiten)

Allgemeiner Boost

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}^T = (v^1, v^2, v^3)$$

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma \vec{v}^T/c \\ \hline -\gamma\,\vec{v}/c & \mathbb{1} + (\gamma - 1)\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{v}^T}{\vec{v}^2} \end{array}\right) \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

2) Drehungen z.B. um z-Achse um Winkel ϑ

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det\Lambda = +1, \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1$$

3) Raumspiegelung

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad \det\Lambda = -1, \quad \Lambda^0{}_0 = 1$$

4) Zeitspiegelung

$$T = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \det\Lambda = -1, \quad \Lambda^0{}_0 = -1$$

(Raum- Zeit - Spiegelung

. das bildet die

- Poincaré - Gruppe (inhomogene LT mit a^μ)
- homogene LT bildet auch Gruppe ($a^\mu = 0$)

orthochrone LT enthalten kein Zeitspiegelung ($\Lambda^0{}_0 = 1$)

Lorentz - Trafo lassen Skalarprodukt im Minkowski - Raum invariant

$$x^2 = x_0{}^2 - \vec{x}^2 = x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu$$

Übungsaufgabe

analog $x'^\mu y'_\mu = x^\mu y_\mu$

6.5 Lorentz - Kovarianz der Dirac - Gl.

Wie transformiert sich $\psi \to \psi'$?

$$x' = \Lambda x + a$$

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \quad \psi(x)$$

$\Rightarrow$ was ist also $S(\Lambda)$?

• S muss linear sein

$$S(\lambda)\,\psi(\Lambda^{\prime}(x^{\prime}-a))$$

⇒ muss gelten $(-i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\,\psi(x)=0$

$(c=\hbar=1)$

$$(-i\gamma^\mu\partial^{\prime}_\mu + m)\,\psi^{\prime}(x^{\prime})=0$$

γ^μ wird nicht transformiert

$$(-i\gamma^\mu \underbrace{\Lambda^\nu{}_\mu\,\partial^{\prime}_\nu}_{=\partial_\mu} + m)\,\underbrace{S^{-1}(\Lambda)\,\psi^{\prime}(x^{\prime})}_{=\psi(x)}=0$$

$$S(\Lambda)\,(\ \ldots\ )=0$$

$$\Rightarrow\quad -i\,S\,\Lambda^\nu{}_\mu\,\gamma^\mu\,S^{-1}\,\partial^{\prime}_\nu\,\psi^{\prime}(x^{\prime}) + m\,\psi^{\prime}(x^{\prime})=0$$

und es gelte

$$(-i\gamma^\nu\partial^{\prime}_\nu + m)\,\psi^{\prime}(x^{\prime})=0$$

⇒ es muss gelten

$$S\,\Lambda^\nu{}_\mu\,\gamma^\mu\,S^{-1}=\gamma^\nu$$

$$\boxed{\Lambda^\nu{}_\mu\,\gamma^\mu = S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^\nu\,S(\Lambda)}$$

Infinitesimale LT (Drehung & Boost)

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \underbrace{g^\mu{}_\nu}_{=\delta_{\mu\nu}} + \Delta\omega^\mu{}_\nu$$

Einsetzen in Gl. $\boxed{\ldots}$

$$\Lambda^\lambda{}_\mu\,g^{\mu\nu}\,\Lambda^\rho{}_\nu = g^{\lambda\rho}$$

$$= (g^\lambda{}_\mu + \Delta\omega^\lambda{}_\mu)\,g^{\mu\nu}\,(g^\rho{}_\nu + \Delta\omega^\rho{}_\nu)$$

$$= g^\lambda{}_\mu\,g^{\mu\nu}\,g^\rho{}_\nu + \Delta\omega^\lambda{}_\mu\,g^{\mu\nu}\,g^\rho{}_\nu + g^\lambda{}_\mu\,g^{\mu\nu}\,\Delta\omega^\rho{}_\nu \cancel{+(\Delta\omega)^2}$$

$$= g^{\lambda\rho} + \Delta\omega^{\lambda\rho} + \Delta\omega^{\rho\lambda}$$

$\Longrightarrow \quad \Delta\omega^{\lambda\rho} = -\Delta\omega^{\rho\lambda}$

$\Rightarrow$ $\Delta\omega$ 4x4 Matrix, jetzt starke Einschränkung
nur noch 6 Parameter

$\hat{=}$ 3 Raumdrehungen (3 Winkel, 3 Achsen)

z. B. $\Delta\omega^1{}_2 = \Delta\varphi = -\Delta\omega^{12}$

+ 3 Boosts

$\Delta\omega^0{}_1 = -\Delta\omega^{01} = -\Delta\beta \quad (\Delta v = c\,\Delta\beta)$