vom letzten mal

$x' = \Lambda x + a$

infinitesimal $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu}$

$\psi'(x') = S(\Lambda)\,\psi(x) \qquad S(\Lambda) = \mathbb{1} + T$

Drehung (um z) $\Delta\omega^{1}{}_{2} = \Delta\varphi$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\vartheta & \sin\vartheta & \\ & -\sin\vartheta & \cos\vartheta & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \rightarrow S(\Lambda) = e^{\frac{i\vartheta}{2}\sigma_{12}} = \cos\frac{\vartheta}{2} + i\sin\frac{\vartheta}{2}\sigma_{12}$$

Boost in x - Richt. $\Delta\omega^{0}{}_{1} = -\Delta\eta$

$$\rightarrow S(\Lambda) = e^{\frac{\eta}{2}\alpha_1} = \cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) + \alpha\sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

$$\alpha = -\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) & & 0 \\ -\sinh(\eta) & \cosh(\eta) & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bel. Richtung

$$\vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\vec{v} \; ; \quad S(-\vec{p}) = \sqrt{\frac{|E| + mc^2}{2mc}}$$

$$p_\pm = p_x \pm i p_y \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z c}{|E| + mc^2} & \frac{p_- c}{\cdots} \\ 0 & 1 & \frac{p_+ c}{\cdots} & -\frac{p_z c}{\cdots} \\ \frac{p_z c}{\cdots} & \frac{p_- c}{\cdots} & 1 & 0 \\ \frac{p_+ c}{\cdots} & -\frac{p_z c}{\cdots} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.6 Lösung der Dirac-Gl. für freie Teilchen

$$\left[-i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc\right]\Psi(x) = 0$$

Ansatz $\quad \Psi_r^{+-} = u_r v_r(k)\, e^{-+ikx}$ $\quad$ positive / negative Energie

$r = 1, 2$ für Spin

$$\hbar k^\mu = p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

$$kx = k^\mu x_\mu$$

einsetzen

$$\hbar^2 k^\mu k_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = mc^2$$

muss gelten, da Dirac-Gl. so konstruiert

oder nachprüfen: $\left[-i\hbar\gamma^\nu\partial_\nu + mc\right]\left[-i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc^2\right]\Psi = 0$

(sollte sein $\Rightarrow$) $\quad -\hbar^2 k^\mu k_\mu + mc^2 = 0$

bleibt noch $u_r(k)$, $v_r(k)$ zu bestimmen

zur Erinnerung: für ruhende Teilchen

$\vec{p} = 0$, $\quad e^{-ikx} = e^{\mp i\frac{E}{\hbar c}ct}$ $\quad$ mit $E = mc^2$

$$u_1(mc, \vec{0}) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad u_2(mc, \vec{0}) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Bewegte Teilchen $\Rightarrow$ LT der ruhenden Teilchen

$\Rightarrow$ erhalte $\quad u_r(k) = \Lambda\, u_r(mc, \vec{0})$

Aktive & passive Transformation

bisher: passive TraFo

das selbe Ereignis in 2 versch. Inertialsystemen betrachtet.

$$x' = \Lambda x, \qquad \Psi'(x') = S(\Lambda)\,\Psi(x) = S(\Lambda)\,\Psi(\Lambda^{-1}x')$$

jetzt: aktive Trafo

$$\Lambda_{\text{passiv}} \hat{=} \Lambda^{-1}_{\text{aktiv}}$$

Λ^{-1} ändert Zustand, aber nicht x

$$\psi'(x) = S(\Lambda)\,\psi(\Lambda^{-1}x)$$

Aktive Trafo um Λ:

$$\psi''(x) = S(\Lambda^{-1})\,\psi(\Lambda x)$$

$\psi(\Lambda x)$: $\quad e^{\pm ikx} \qquad k^{\mu}x_{\mu} = k^{\mu'}x_{\mu'}$

$\Rightarrow$ x-Abhängigkeit bleibt unverändert

aber u_r und v_r werden mit $S(\Lambda^{-1})$ transformiert:

Teilchen mit Geschwind. $\vec{v} \hat{=} \vec{p}$

$\Lambda^{-1} \hat{=}$ Boost mit $-\vec{p}$

$$u''_1(k) = S(\Lambda^{-1})\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \sqrt{\frac{|E|+mc^2}{2mc^2}}\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{p_z c}{|E|+mc^2}\\\frac{p_+ c}{\cdots}\end{pmatrix}$$

freies bewegtes Teilchen „schleppt" Antiteilchen mit

$$u''_2(k) = \sqrt{\frac{\cdots}{\cdots}}\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{p_- c}{\cdots}\\\frac{-p_z c}{\cdots}\end{pmatrix}$$

Dichte eines freien Teilchens

$$\rho = \psi^{\dagger}(x)\,\psi(x)$$

Bsp $\quad \vec{p} = p\,\vec{e}_z$

$$\psi_1^{(+)}(x) = u_1^{"}(k)\, e^{-ikx}$$

$$\left(\psi_1^{(+)}(x)\right)^+ \psi_1^{(+)}(x) = \left(u_1^{"}(k)\right)^+ u_1^{"}(k)$$

$$= \frac{|E| + mc^2}{2mc^2}\left(1 + \frac{p^2c^2}{(|E| + mc^2)^2}\right) \quad ?$$

$$\cancel{=} \frac{1}{2mc^2}\left(|E| + mc^2 + c^2p^2\right) = \frac{2|E|}{2mc^2}$$

es soll rauskommen $\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

$\hat{=}$ Lorentz-Kontraktion

6.7 Drehimpuls

nichtrelativist. QM $\Rightarrow$ Bahndrehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

ist Erzeugender für Drehung

$$R_{\hat{u}}(\alpha) = \exp\left(-i\alpha \vec{L}\,\frac{\hat{u}}{\hbar}\right)$$

bewirkt Drehung um Achse $\hat{u}$ um Winkel α

$$R_u(\alpha) = \mathbb{1}$$

für Spin gilt ähnliches

$$R_{\hat{u}}(\alpha) = \exp\left(-i\alpha \vec{S}\cdot\frac{\hat{u}}{\hbar}\right)$$

$$R_{\hat{u}}(2\pi) = -\mathbb{1}$$

Drehung in Dirac-Gl. $\qquad$ aktive Trafo um Λ^{-1}

Welcher Operator erzeugt diese Drehung?

Infinitesimale Drehung $\qquad$ infinites. Drehung um bel. Achse

$$\psi'(x) = S(\Lambda)\,\psi(\Lambda^{-1}x)$$

$$= \left(1 - \frac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)\psi\Big(\underbrace{[g^{\varsigma}{}_{\sigma} - \Delta\omega^{\varsigma}{}_{\sigma}]x}_{= x^{\varsigma} - \Delta\omega^{\varsigma}{}_{\sigma}x^{\sigma}}\Big)$$

$\Downarrow$ Taylor

$$= (1 - \Delta\omega^{\rho}{}_{\sigma}\, x^{\sigma}\, \partial_{\rho})\, \psi(x)$$

$$= \left(1 - \frac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} - \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}\partial_{\mu}\right)\psi(x)$$

$$= \left[1 + \Delta\omega^{\mu\nu}\left(-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu}\right)\right]\psi(x)$$

$$\Delta\omega^{\mu\nu}\left(-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu} + x_{\mu}\partial_{\nu}\right)$$

für Drehung gilt $\Delta\omega^{ij} = -\varepsilon_{ijk}\,\Delta\varphi^{k}$

um $\vec{\Delta\varphi}$ $\qquad = -\Delta\omega^{ji}$

Rest von $\Delta\omega = 0$

$\sigma_{ij} = \varepsilon^{ijk}\,\Sigma^{k}$ mit $\Sigma^{k} = \begin{pmatrix}\sigma^{k} & 0\\ 0 & \sigma^{k}\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \psi'(x) = \Big[1 - \underbrace{\varepsilon^{ijk}\Delta\varphi^{k}\Big(-\frac{i}{4}\varepsilon^{ijk}}_{\text{Zusammenfassen}}\Sigma^{k} \underset{?}{+} x^{i}\partial_{j}\Big)\Big]\psi(x)$$

$$= \Big[1 - \Delta\varphi^{k}\Big(-\frac{i}{2}\delta_{kk}\Sigma^{k} \underset{+?}{-} \varepsilon^{ijk}x^{i}\partial_{j}\Big)\Big]\psi(x)$$

$$= \Big[1 - i\Delta\varphi^{k}\underbrace{\Big(\frac{1}{2}\Sigma^{k} \underset{-?}{+} \frac{1}{i}\varepsilon^{ijk}x^{i}\partial_{j}\Big)}_{=\frac{J^{k}}{\hbar}}\Big]\psi(x)$$

$$\psi'(x) = \left(1 + i\Delta\varphi^{k}\frac{J^{k}}{\hbar}\right)\psi(x)$$

$\to \exp\left(i\varphi^{k}\frac{J^{k}}{\hbar}\right)\psi(x)$ für endl. Drehung

mit $J^{k} = \frac{\hbar}{i}\varepsilon^{ijk}x^{i}\partial_{j} + \frac{\hbar}{2}\Sigma^{k}$

also $\boxed{\vec{J} = \vec{r} \times \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}}$

Operatoren transformieren sich dann wie

$$A' = \exp\left(i\varphi^k \frac{J^k}{\hbar}\right) A \exp\left(-i\varphi^k \frac{J^k}{\hbar}\right)$$

für infinitesimale Trafo

$$A' = A - i\frac{\Delta\varphi^k}{\hbar}[A, J^k]$$

$\Rightarrow$ für "skalare" Operatoren (= drehinvariante)

$$A' = A \iff [A, J^k] = 0$$

Beispiel: Hamilton mit drehinvariantem Potential

für Vektor-Operatoren

$$V'^i = V^i + \varepsilon^{ijk}\Delta\varphi^j V^k = V^i - \frac{i\Delta\varphi^j}{\hbar}[V^i, J^j]$$

$$\iff [J^j, V^i] = i\hbar\varepsilon^{ijk} V^k$$