6.6 Lösung der Dirac-Gleichung für freie Teilchen

$$(-i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu + mc)\,\psi(x) = 0$$

Ansatz: $\psi_r^{(+)}(x) = u_r(k)\, e^{-ikx}$ positive Energie

$\psi_r^{(-)}(x) = v_r(k)\, e^{ikx}$ negative Energie

$\hbar k^\mu = p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ $\quad kx = k^\mu x_\mu$

$\boxed{\hbar^2 k^\mu k_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m c^2}$ muss gelten, weil Dirac-Gl. so konstr.

nachprüfen $[+i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu + mc][-i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu + mc] = 0$ (Übung)

Konstruktion: $u_r(k)$, $v_r(k)$

- für ruhende Teilchen $\vec{p} = 0$ $\qquad e^{\mp ikx} = e^{\mp i \frac{E}{\hbar c} ct}$ mit $E = mc^2$

$u_1(mc, \vec{0}) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad u_2(mc,\vec{0}) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad v_1(mc,\vec{0}) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad v_2(mc,\vec{0}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

- Bewegte Teilchen:

$\left.\begin{array}{l}\text{erhalte } u_r(k) \text{ aus } u_r(mc,\vec{0})\\ \text{erhalte } v_r(k) \text{ aus } v_r(mc,\vec{0})\end{array}\right\}$ durch Lorentz transformation

- Bisher passive Transformation: dasselbe Ereignis in I und I'

$\boxed{x' = \Lambda x \quad ; \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\,\psi(\Lambda^{-1}x')}$

$\hat{=}$ Aktive Transformation um Λ^{-1}, ändert den Zustand aber nicht x.

$\boxed{\psi'(x) = S(\Lambda)\,\psi(\Lambda^{-1}x)}$

Aktive Transformation um Λ

$\boxed{\psi''(x) = S(\Lambda^{-1})\,\psi(\Lambda x)}$

- $\psi(\Lambda x)$: $\quad e^{\pm ikx}$ $\quad k^\mu x_\mu = k'^\mu x'_\mu$
- d.h. die x-Abhängigkeit ist unverändert aber u_r, v_r mit $S(\Lambda^{-1})$ transform.
- Teilchen mit Geschw. $\vec{v} = \vec{p}$, $\Lambda^{-1} \hat{=}$ Boost mit $-\vec{p}$

$u_1''(k) = S(\Lambda^{-1})\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \sqrt{\frac{|E| + mc^2}{2mc^2}}\begin{pmatrix}1\\0\\ \frac{p_z c}{|E| + mc^2}\\ \frac{p_+ c}{|E| + mc^2}\end{pmatrix}$ $\qquad$ ($'' \hat{=}$ aktive Trafo)

$u_2''(k) = \sqrt{\frac{|E| + mc^2}{2mc^2}}\begin{pmatrix}0\\1\\ \frac{p_- c}{|E| + mc^2}\\ \frac{-p_z c}{|E| + mc^2}\end{pmatrix}$

(v_1'' und v_2'' analog)

Dichte: $\rho = \psi^\dagger(x)\psi(x)$

Beispiel: $\vec{p} = p\,\vec{e}_z$; $\psi_1^{(+)}(x) = u_1^{\parallel}(k)\, e^{-ikx}$

$$\left(\psi_1^{(+)}(x)\right)^\dagger \psi_1^{(+)}(x) = \left(u_1^{\parallel}(k)\right)^\dagger u_1^{\parallel}(k) = \frac{|E|+mc^2}{2mc^2}\left(1+\frac{p^2c^2}{(|E|+mc^2)^2}\right) = \ldots = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$\hat{=}$ Lorentzkontraktion

6.7 Drehimpuls

nicht relativ. QM $\Rightarrow$ Bahndrehimpuls $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$

- ist Erzeugender für Drehungen $R_{\vec{u}}(\alpha) = e^{-i\alpha\frac{\vec{L}\cdot\vec{u}}{\hbar}}$ $\quad R_{\vec{u}}(2\pi) = \mathbb{1}$

  bewirkt Drehung um Achse $\hat{u}$ um Winkel α
- Für Spin gilt ähnlich $R_{\vec{u}}(\alpha) = e^{-i\alpha\frac{\vec{S}\cdot\vec{u}}{\hbar}}$ $\quad R_{\vec{u}}(2\pi) = \mathbb{1}$
- Drehung in Dirac-Gleichung um Λ^{-1}

  Wie sieht dieser Operator aus?

Infinitesimale Drehung um beliebige Achse

$$\psi'(x) = S(\Lambda)\,\psi(\Lambda^{-1}x) = \left(1-\frac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)\psi\big(\underbrace{(\delta^\rho{}_\sigma - \Delta\omega^\rho{}_\sigma)x^\sigma}_{x^\rho-\Delta\omega^\rho{}_\sigma x^\sigma}\big)$$

Taylorentw. $\psi(\Lambda^{-1}x) = (1-\Delta\omega^\rho{}_\sigma x^\sigma\partial_\rho)\psi(x)$

$$\psi'(x) = \left(1-\frac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} - \Delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu\partial_\mu\right)\psi(x)$$

$$= \left(1+\Delta\omega^{\mu\nu}\left(-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu} - x_\nu\partial_\mu\right)\right)\psi(x)$$

- Für Drehung $\Delta\omega^{ij} = -\varepsilon_{ijk}\Delta\varphi^k$ um $\Delta\vec{\varphi}$

  $= -\Delta\omega^{ji}$ $\qquad$ Rest ist 0 (Indizes)

$\sigma_{ij} = \varepsilon^{ijk}\Sigma^k$; $\Sigma^k = \begin{pmatrix}\sigma^k & 0\\ 0 & \sigma^k\end{pmatrix}$ $\qquad \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ij\tilde{k}} = 2\delta_{k\tilde{k}}$

$$\Rightarrow \psi'(x) = \left(1-\varepsilon^{ij\tilde{k}}\Delta\varphi^{\tilde{k}}\cdot\left(-\frac{i}{4}\varepsilon^{ijk}\Sigma^k + x^i\partial_j\right)\right)\psi(x)$$

$$= \left(1-\Delta\varphi^{\tilde{k}}\left(-\frac{i}{2}\delta_{k\tilde{k}}\Sigma^k - \varepsilon^{ij\tilde{k}}x^i\partial_j\right)\right)\psi(x)$$

$$= \left(1+i\,\Delta\varphi^k\underbrace{\left(\frac{1}{2}\Sigma^k + \frac{1}{i}\varepsilon^{ijk}x^i\partial_j\right)}_{\frac{J^k}{\hbar}}\right)\psi(x)$$

$$\boxed{\psi'(x) = \left(1+i\,\Delta\varphi^k J^k\frac{1}{\hbar}\right)\psi(x)}$$

- $e^{i\varphi^k J^k/\hbar}\,\psi(x)$ für endliche Drehungen

mit $J^k = \frac{\hbar}{i}\varepsilon^{ijk}x^i\partial_j - \frac{\hbar}{2}\Sigma^k$

also $\boxed{\vec{J} = \vec{r}\times\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}}$ Gesamt-Drehimpuls

Operatoren transformieren sich dann

$$\boxed{A' = e^{i\varphi^k \frac{J^k}{\hbar}} A e^{-i\varphi^k \frac{J^k}{\hbar}}}$$

für infinitesimale Transf.

$$A' = A - i\frac{\Delta\varphi^k}{\hbar}[A, J^k]$$

$\Rightarrow$ 1 für Skalare (= drehinvariante) Operatoren

$$A' = A \Leftrightarrow [A, J^k] = 0$$

Beispiel: ist Hamilton in drehinvariantem Potential

2 für Vektoren: $V'^j = V^j + \varepsilon^{ijk}\Delta\varphi^i V^k = V^j - \frac{i\Delta\varphi^i}{\hbar}[V^j, J^i]$

$$\Rightarrow [J^i, V^j] = i\hbar\,\varepsilon^{ijk} V^k$$