Übung

$$[-i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc]\,\Psi(x) = 0$$

$$\Psi(x) \propto e^{-ikx} \qquad kx = k^\mu x_\mu$$

$$0 = [i\hbar\gamma^\nu\partial_\nu + mc][-i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc]\,e^{ikx}$$

$$= [-\hbar^2 \underbrace{\gamma^\nu\gamma^\mu}\, k_\nu k_\mu + m^2c^2]\,e^{-ikx}$$

$$= \tfrac{1}{2}[\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu]\,k_\nu k_\mu = g^{\mu\nu} k_\nu k_\mu = k^\mu k_\mu$$

Dichte $\rho = \Psi^+\Psi$ für bewegte Teilchen

$$\rho = \ldots = \frac{E + mc^2}{2mc^2}\left(1 + \frac{p^2c^2}{(|E| + mc^2)^2}\right)$$

$$= \ldots = \frac{E^2 + m^2c^4 + p^2c^2 + 2|E|mc^2}{2mc^2(|E| + mc^2)} = \frac{|E|}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\vec{J} = \vec{r} \times \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\,\mathbb{1} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} \qquad \Sigma^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$$

Drehung $\Psi'(x) = e^{i\varphi^k J^k/\hbar}\,\Psi(x)$

$$A' = \exp(i\varphi^k J^k/\hbar)\;A\;\exp(-i\varphi^k J^k/\hbar)$$

infinitesimal $A' = A - i\frac{\Delta\varphi^k}{\hbar}[A, J^k]$

(1) für skalare (= drehinvariante) Operatoren gilt: $A' = A \iff [A, J^k] = 0$

Bsp $[H, J^k] = 0$ für Rotationssymm. Potential

(2) Für Vektoren $v'^i = v^i + \varepsilon^{ijk} \Delta\varphi^j v^k$

$= v^i - \frac{i}{\hbar} \Delta\varphi^j [v^i, J^j]$

$\Rightarrow [J^i, v^j] = i\hbar\, \varepsilon^{ijk} v^k$

$\Longrightarrow$ Eigenwerte von $\vec{J}^2$ sind $\hbar^2 j(j+1)$

mit j ~~ganz~~ oder halbzahlig

siehe unten

EWe von J^3 sind $\hbar m_j$ mit $m_j = -j, \dots, j-1, j$

$\vec{L}^2$ und L^3 haben EWe $\hbar\, \ell(\ell+1)$, $\ell = 0, 1, 2 \dots$

und $\hbar m_\ell$, $m_\ell = -\ell, \dots, 0, \dots + \ell$

$\left(\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}\right)^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \mathbb{1}$ mit Einheitsmatrix

$= \hbar^2 s(s+1)\mathbb{1} \quad \hat{=}$ Spin $\frac{1}{2}$

$\frac{\hbar}{2}\Sigma^3$ hat EWe $m_s = \pm\frac{1}{2}$

$J^3 = L^3 + \frac{\hbar}{2}\Sigma^3$ hat EWe $m_j = m_\ell + m_s$

$\boxed{\text{halb}}$ ganz halb

j muss halbzahlig sein

6.8 Dirac-Gl. für zentralsymmetr. Potential

Zentralsymm. Potential (z.B. Coulomb $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$)

$\Rightarrow H = c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc^2 + V(r)$

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

Es gilt $[H, \vec{J}] = 0$, $[J^2, J_z] = 0$

$[H, \mathcal{P}] = 0$

Parität $r \to -r$ $\quad \mathcal{P} = \beta P_{orb}$

Raumspiegelungsoperator

aber $\vec{L}^2$, L_z und Σ_z vertauschen nicht mit H

also Eigenfkt. von H sind nicht Eigenfkt. von $\vec{L}^2$, L_z

Die gesuchten Eigenfkt.

$$\vec{J}^2 \psi_j = \hbar\, j(j+1)\, \psi_j$$

$$J_z \psi_{jm_j} = \hbar\, m_j\, \psi_{jm_j}$$

$$P \psi_{jm_j\ldots} = \pm\, \psi_{jm_j\ldots}$$

$$H \psi_{jm_j\ldots} = E_{\ldots} \psi_{jm_j\ldots}$$

ψ_{jm_j} sind Linearkombinationen von orbitalen Eigenfkt. $Y_{em_e}(\theta, \varphi)$ mit versch. ℓ, m_e sowie Spinoren mit versch. m_s

(war $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$)

Nicht-Relativistische Addition von Drehimpulsen

$\Rightarrow$ Clebsch-Gordan-Koeff. (nächste Kapitel)

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

Eigenzustände von J^2, J_z sind Linearkomb. von Zuständen mit versch. ℓ und m_e und m_s

$$j = \ell \pm \tfrac{1}{2}, \quad m_j = m_\ell \pm \tfrac{1}{2} \quad \longleftarrow \quad \ell,\ m_e,\ m_s = \pm \tfrac{1}{2}$$

Es gilt $$\varphi^{(+)\ell}_{j=\ell+\frac{1}{2},\, m_j}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\ell + m_j + \frac{1}{2}}{2\ell+1}}\; Y_{\ell, m_j - \frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{\ell - m_j + \frac{1}{2}}{2\ell+1}}\; Y_{\ell, m_j + \frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}$$ 2er Spinor

$$\varphi^{(-)\,\ell}_{j=\ell-\frac{1}{2},\,m_j} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\dfrac{\ell-m_j+\frac{1}{2}}{2\ell+1}}\; Y_{\ell,\,m_j-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\dfrac{\ell+m_j+\frac{1}{2}}{2\ell+1}}\; Y_{\ell,\,m_j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

zus. Index, stört nicht

Hier war geschrieben, wie aus gegebenen ℓ Zustände mit $j=\ell+\frac{1}{2}$ und $j=\ell-\frac{1}{2}$ produziert werden können.

Wir wollen aber Eigenzustände von J^2 und J_z, also mit vorgegebenem j.

D.h. wir bilden Lin. Komb. von $\ell=j+\frac{1}{2}$ und $\ell=j-\frac{1}{2}$

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} G(r)\;\varphi^{\ell=j-\frac{\varkappa}{2}}_{j,\,m_j}(\theta,\varphi) \\ F(r)\;\varphi^{\ell=j+\frac{\varkappa}{2}}_{j,\,m_j}(\theta,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \cancel{\chi} \end{pmatrix}$$

$\varkappa=\pm 1$

erfüllt $\psi_{j,\,m_j}$ sind EV von J^2 und J_z

zusätzlich EV von $\mathcal{P}$ (noch zu zeigen)

↳ daher kann man nicht beliebig allgemeinere Ansätze machen

$$\mathcal{P}\,\psi = \beta\,\mathcal{P}_{orb}\,\psi = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \\ & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{orb}\; G\;\varphi^{\ell=j-\frac{\varkappa}{2}}_{j,\,m_j} \\ \mathcal{P}_{orb}\; F\;\varphi^{\ell=j+\frac{\varkappa}{2}}_{j,\,m_j} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_{orb}\, Y_{\ell,m_\ell} = (-1)^{\ell}\, Y_{\ell\, m_\ell}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{j-\frac{\varkappa}{2}} & G\;\varphi_{\dots} \\ (-1)^{j+\frac{\varkappa}{2}} & F\;\varphi_{\dots} \end{pmatrix} = (-1)^{j-\frac{\varkappa}{2}}\,\psi = \pm\,\psi$$

Parität hängt von $j-\frac{\varkappa}{2}$ ab stationäre Dirac-Gl $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow E$

$$(E - mc^2 - V)\,\eta = c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\chi$$

$$(E + mc^2 - V)\,\chi = c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\eta$$

Umformungen

$\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = 2\delta_{ij}$

$\Rightarrow (\vec{\sigma}\cdot\vec{r})(\vec{\sigma}\cdot\vec{r}) = r^2$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\chi = \frac{1}{r^2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\chi$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$= \frac{1}{r^2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})[\vec{r}\cdot\vec{p} + \underbrace{i\vec{\sigma}(\vec{r}\times\vec{p})}_{\vec{\sigma}\cdot\vec{L}}]\chi$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{L})\chi = \frac{1}{\hbar}\left((\vec{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma})^2 - \vec{L}^2 - \frac{\hbar^2}{4}\vec{\sigma}^2\right)\chi$$

$$= \frac{\hbar^2}{\hbar}\left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right)\chi$$

$l = j + \frac{\varkappa}{2}$

$$= -\hbar\left(\varkappa(j+\tfrac{1}{2}) + 1\right)\chi$$

$$\vec{r}\cdot\vec{p}\, f(r)\, Y_{...}(\theta,\varphi) = i\hbar r\frac{\partial}{\partial r} f(r)\; Y(\theta,\varphi)$$

und $\frac{1}{r}(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})\,\varphi_{j m_j}^{l=j+\frac{\varkappa}{2}} = -\varphi_{j m_j}^{l=j-\frac{\varkappa}{2}}$

(hier ohne Beweis)

$$\boxed{\Rightarrow (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\chi = \frac{i\hbar}{r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r} + \left(\varkappa(j+\tfrac{1}{2}) + 1\right)f(r)\right)\varphi_{j,m_j}^{l=j-\frac{\varkappa}{2}}}$$

und analog

$$\boxed{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\eta = \frac{i\hbar}{r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r} - \left(\varkappa(j+\tfrac{1}{2}) - 1\right)g(r)\right)\varphi_{j,m_j}^{l=j+\frac{\varkappa}{2}}}$$

Winkelanteile links und rechts gleich

$\Rightarrow$ können abseparieret werden

$\Downarrow$

$$\left(E - mc^2 - V(r)\right) g = i c \hbar \left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\kappa \left(j + \frac{1}{2} \right) + 1 \right) f \right)$$

$$\left(E + mc^2 - V(r)\right) f = i c \hbar \left(\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\kappa \left(j + \frac{1}{2} \right) - 1 \right) g \right)$$