Nachträge letzte Vorlesung

Übung: $(-i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc)\psi(x) = 0 \qquad \psi(x) \sim e^{-ikx} \quad kx = k^\mu x_\mu$

$$0 = (i\hbar\gamma^\nu\partial_\nu + mc)(-i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc)e^{-ikx}$$

$$= (\hbar\gamma^\nu\partial_\nu + mc)(-\hbar\gamma^\mu k_\mu + mc)\,e^{-ikx}$$

$$= (-\hbar^2\underbrace{\gamma^\nu\gamma^\mu k_\nu k_\mu}_{} + m^2c^2)\,e^{-ikx}$$

$$= \tfrac{1}{2}[\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu]\,k_\nu k_\mu = g^{\mu\nu}k_\nu k_\mu = k^\mu k_\mu$$

$$\Rightarrow 0 = -\hbar^2 k^\mu k_\mu + m^2c^2 \Rightarrow -\frac{E^2}{c^2} + p^2 + m^2c^2 = 0$$

$$\hbar k^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \qquad E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$$

Lorentz Transformation u''

Dichte ρ $\qquad \rho = \psi^+\psi$

Beispiel: $\rho = u_1''^{+}u_1'' = \dfrac{E+mc^2}{2mc^2}\left(1 + \dfrac{p^2c^2}{(|E|+mc^2)^2}\right)$

$$= \frac{1}{2mc^2(|E|+mc^2)}\left((|E|+mc^2)^2 + p^2c^2\right)$$

$$= \frac{E^2 + m^2c^4 + p^2c^2 + 2|E|mc^2}{2mc^2(|E|+mc^2)} = \frac{|E|}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\vec{J} = \vec{r}\times\frac{\hbar}{i}\nabla\,\mathbb{1} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} \qquad \Sigma^k = \begin{pmatrix}\sigma^k & 0\\ 0 & \sigma^k\end{pmatrix}$$

Drehung $\quad \psi'(x) = e^{i\varphi^k\frac{J^k}{\hbar}}\psi(x)$

$$A' = e^{i\varphi^k\frac{J^k}{\hbar}}A\,e^{-i\varphi^k\frac{J^k}{\hbar}}$$

infinitesimal: $\quad A' = A - \dfrac{i\,\varphi^k}{\hbar}[A, J^k]$

(1) für skalare (= dreh invariante) Operatoren gilt

$$A' = A \iff [A, J^k] = 0$$

Beispiel $[H, J^k] = 0$ für rotationssymmetrische Potential

(2) für Vektoren $v'^i = v^i + \varepsilon^{ijk}\Delta\varphi^j v^k$ (Geometrie)

$$= v^i - \frac{i}{\hbar}\Delta\varphi^j[v^i, J^j]$$

$$\Rightarrow [J^i, v^j] = i\hbar\,\varepsilon^{ijk}v^k$$

also $[J^i, J^j] = i\hbar\,\varepsilon^{ijk}J^k$ also **$\vec{J}$ ist ein Drehimpuls**

$\Rightarrow$ Eigenwerte von $\vec{J}^2$ sind $\hbar^2 j(j+1)$ mit j = ganz oder halbzahlig

Eigenwerte von J^3 ($\hat{=} J_z$) sind $\hbar m_j$ mit $m_j = -j, -j+1, \dots, j$

$\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} \vec{L}^2 \\ L_3 \end{matrix}\right\}$ haben EW $\left\{\begin{matrix} \hbar^2 l(l+1) & l = 0, 1, 2 \dots \\ \hbar m_l & , m_l = -l, \dots, l \end{matrix}\right.$

$\Rightarrow$ $\left(\frac{\hbar}{i} \vec{\Sigma}\right)^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \mathbb{1} = \hbar^2 s(s+1)\mathbb{1}$ Einheitsmatrix $\hat{=}$ Spin $\frac{1}{2}$

$\frac{\hbar}{i}\Sigma^3$ hat EW $m_s = \pm\frac{1}{2}$ halbzahlig

$J^3 = L^3 + \frac{\hbar}{i}\Sigma^3$ hat EW $m_j = m_l + m_s$

ganzzahlig

$\Rightarrow$ **j muss halbzahlig sein**

6.8 Dirac-Gleichung für zentralsymm. Potential

zentralsymmetrisches Potential $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$ (Coulombpotential)

$\boxed{H = c\vec{\alpha} + \beta mc^2 + V(r)}$ $\quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}$

Es gilt: $[H, \vec{J}] = 0 = [\vec{J}^2, J_z] = [H, P]$

$P = e^{i\varphi} \beta P_{orb}$ (Raumspiegelungsop) $\quad P_{orb}$ macht aus $\vec{r} \to -\vec{r}$

$\varphi = 1$

Aber $\vec{L}^2$, L_z und Σ_z vertauschen nicht mit H

Eigenfunktionen von H sind keine Eigenfkt von $\vec{L}^2$, L_z und Σ_z

Die gesuchten Eigenfunktionen:

$\vec{J}^2 \, \psi_{j,m_j \dots} = \hbar\, j(j+1)\, \psi_{j,m_j \dots}$ $\qquad j$ = halbzahlig

$J_z \, \psi_{j,m_j \dots} = \hbar m_j \, \psi_{j,m_j \dots}$

$P \, \psi_{j,m_j \dots} = \pm \psi_{j,m_j, \dots}$

$H \, \psi_{j,m_j \dots} = E_{\dots} \, \psi_{j,m_j \dots}$

- $\psi_{j,m_j}(\vec{r})$ sind Linearkombination von orbitalen Wellenfkt. $Y_{l,m_l}(\theta,\varphi)$ mit verschiedenen l und m_l sowie Spinoren mit verschiedenen m_s.
- Spinoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ nicht relativistisch

Nicht-rel. Theorie der Addition von Drehimpulsen

$\Rightarrow$ Clebsch-Gordan-Koeff.

$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

Eigenzustände von $\vec{J}^2$, J_z sind Lin. Komb. von Zuständen mit verschiedenen l und m_l, m_s. $\quad m_s = \pm\frac{1}{2}$

$j = l \pm \frac{1}{2}$, $m_j = m_l \pm \frac{1}{2}$ (aus l, m_l, m_s)

$$\varphi^{(+)}_{j,m_j} = \varphi^{l}_{j=l+\frac{1}{2},m_j}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}}\, Y_{l,m_j-\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \\ \sqrt{\frac{l-m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}}\, Y_{l,m_j+\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \end{pmatrix} \text{2er-Spinor}$$

$$\varphi^{(-)}_{j,m_j} = \varphi^{l}_{j=l-\frac{1}{2},m_j}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{l-m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}}\, Y_{l,m_j-\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \\ \sqrt{\frac{l+m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}}\, Y_{l,m_j+\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}$$

Aus gegebenem l Zustände mit $j = l \pm \frac{1}{2}$ produzieren

Wir wollen aber Eigenzustände von $\vec{J}^2$ und J_z, also mit vorgegebenem j, d.h. wir bilden Lin. Komb. mit $l = j \pm \frac{1}{2}$.

Ansatz:

$$\boxed{\psi_{j,m_j,\dots}(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} g(r)\, \varphi^{l=j-\frac{\kappa}{2}}_{j,m_j}(\theta,\varphi) \\ f(r)\, \varphi^{l=j+\frac{\kappa}{2}}_{j,m_j}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \eta \\ \chi \end{pmatrix}$$

$\kappa = \pm 1 \Rightarrow$ Freiheit, Teilchen <-> Antiteilchen

<u>erfüllt</u>: $\psi_{j,m_j,\dots}$ sind EV von $\vec{J}^2$ und J_z
sind auch EV von P (noch zeigen)

$$P\psi = \beta P_{orb}\psi \qquad P_{orb}\, Y_{l,m_l} = (-1)^l\, Y_{l,m_l}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\!\!1 & 0 \\ 0 & -1\!\!1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{orb}\, g\, \varphi^{l=j-\frac{\kappa}{2}}_{j,m_j}(\theta,\varphi) \\ P_{orb}\, f\, \varphi^{l=j+\frac{\kappa}{2}}_{j,m_j}(\theta,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\!\!1 & 0 \\ 0 & -1\!\!1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{j-\frac{\kappa}{2}}\, g\, \varphi\dots \\ (-1)^{j+\frac{\kappa}{2}}\, f\, \varphi\dots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^{j-\frac{\kappa}{2}} 1\!\!1 & 0 \\ 0 & (-1)^{j+\frac{\kappa}{2}} 1\!\!1 \end{pmatrix} \psi = (-1)^{j-\frac{\kappa}{2}}\, \psi = \pm \psi$$

Parität hängt ab von $j - \frac{\kappa}{2}$

Stationäre Dirac-Gleichung $\quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow E$

$$(E - mc^2 - V)\, \eta = c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\, \chi$$

$$(E + mc^2 - V)\, \chi = c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\, \eta$$

Umformungen

$$\vec\sigma\cdot\vec p\,\chi = \frac{1}{r^2}(\vec\sigma\cdot\vec r)(\vec\sigma\cdot\vec r)(\vec\sigma\cdot\vec p)\,\chi$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{mit } \sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = 2\delta_{ij} \;\Rightarrow\; (\vec\sigma\cdot\vec r)(\vec\sigma\cdot\vec r) = r^2 \\ (\vec\sigma\cdot\vec a)(\vec\sigma\cdot\vec b) = \vec a\cdot\vec b + i\,\vec\sigma\cdot(\vec a\times\vec b)\end{array}}$$

$$= \frac{1}{r^2}(\vec\sigma\cdot\vec r)\Big(\vec r\cdot\vec p + i\,\underbrace{\vec\sigma\cdot(\vec r\times\vec p)}_{\vec\sigma\cdot\vec L}\Big)\chi$$

$$\vec\sigma\cdot\vec L\,\chi = \frac{1}{\hbar}\Big(\overbrace{\big(\vec L + \tfrac{\hbar}{2}\vec\sigma\big)^2}^{\vec J^2} - \vec L^2 - \frac{\hbar^2}{4}\vec\sigma^2\Big)\chi$$

$$= \hbar\Big(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\Big)\chi \qquad \Big(l = j + \frac{\kappa}{2}\Big)$$

$$= -\hbar\Big(\kappa\big(j+\tfrac{1}{2}\big) + 1\Big)\chi$$

$$(\vec r\cdot\vec p)\,f(r)\,\mathcal{Y}_{\dots}(\theta,\varphi) = -i\hbar\, r\,\frac{\partial f}{\partial r}\,\mathcal{Y}_{\dots}(\theta,\varphi)$$

$$\frac{1}{r}(\vec\sigma\cdot\vec r)\,\varphi_{j,m_j}^{l=j+\frac{\kappa}{2}}(\theta,\varphi) = -\varphi_{j,m_j}^{l=j-\frac{\kappa}{2}}(\theta,\varphi) \qquad \text{(in Schwabl)}$$

$$\boxed{(\vec\sigma\cdot\vec p)\,\chi = \frac{i\hbar}{r}\Big(r\frac{\partial f}{\partial r} + \Big(\kappa\big(j+\tfrac{1}{2}\big)+1\Big)f(r)\Big)\,\varphi_{j,m_j}^{l=j-\frac{\kappa}{2}}}$$

analog

$$\boxed{(\vec\sigma\cdot\vec p)\,\eta = \frac{i\hbar}{r}\Big(r\frac{\partial g}{\partial r} - \Big(\kappa\big(j+\tfrac{1}{2}\big)-1\Big)g(r)\Big)\,\varphi_{j,m_j}^{l=j+\frac{\kappa}{2}}}$$

Winkelanteile sind links und rechts gleich, können separiert werden

$$\boxed{\begin{array}{l}(E - mc^2 - V(r))\,g = ic\hbar\Big(\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\Big(\kappa\big(j+\tfrac{1}{2}\big)+1\Big)f\Big) \\ (E + mc^2 - V(r))\,f = ic\hbar\Big(\dfrac{\partial f}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\Big(\kappa\big(j+\tfrac{1}{2}\big)-1\Big)g\Big)\end{array}}$$