lege Potential fest:

Coulomb-Potential $\quad V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$

z-fach geladen $\quad = -\hbar c \frac{Z\alpha}{r}$

$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$

Feinstrukturkonst.

Ersetze (in Gleichung von letztem mal)

$F = i\frac{f}{r} \quad , \quad G = \frac{g}{r}$

$$\Rightarrow \left(E - mc^2 + \frac{Z\alpha}{r}\hbar c\right) g = -\hbar c\left[\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\kappa(j+\frac{1}{2})}{r} f\right]$$

$$\left(E + mc^2 + \frac{Z\alpha}{r}\hbar c\right) f = \hbar c\left[\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\kappa(j+\frac{1}{2})}{r} g\right]$$

(Schwabl, Gl. 8.2.23)

Skizze der Lösung (in Schwabl beschrieben)

Wir suchen gebundene Zustände

$E < mc^2$ $\quad$ ($\hat{=}$ $E < 0$ wenn man die Ruheenergie weglässt)

Weiter mit Potenzreihenansatz in dimensionslosem

$$\rho = r\,\frac{\sqrt{m^2c^4 - E^2}}{\hbar c}$$

$$g(\rho) = \rho^s \left(a_0 + a_1\rho + \dots\right) e^{-\rho}$$

Verhalten am Ursprung $\quad$ Verhalten bei $\rho \to \infty$

$a_0, b_0 \neq 0$

$$f(\rho) = \rho^s \sum_{i=0}^{\infty} b_i \rho^i \; e^{-\rho}$$

Einsetzen gibt Rekursionsformel für a_ν, b_ν

$\hbar = c = 1$

$$\left[s+\nu+K\left(j+\tfrac{1}{2}\right)\right] b_\nu - b_{\nu-1} + Z\alpha\, a_\nu - \sqrt{\frac{m-E}{m+E}}\, a_{\nu-1} = 0$$

$$\left[s+\nu-K\left(j+\tfrac{1}{2}\right)\right] a_\nu - a_{\nu-1} - Z\alpha\, b_\nu - \sqrt{\frac{m-E}{m+E}}\, b_{\nu-1} = 0$$

Was passiert für

$\nu = 0$
$$\left[s+\nu+K\left(j+\tfrac{1}{2}\right)\right] b_0 + Z\alpha\, a_0 = 0$$
$$\left[s+\nu+K\left(j+\tfrac{1}{2}\right)\right] a_0 - Z\alpha\, b_0 = 0$$

LGS hat nichttriviale Lösung $a_0, b_0 \neq 0$
für $\det() = 0$ $\Rightarrow$ $s = \pm\sqrt{K^2\left(j+\tfrac{1}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2}$

„−" ist verboten,
für $\rho = 0$ nicht sinnvoll

Rekursionsformel für $a_\nu, b_\nu \rightarrow a_{\nu+1}, b_{\nu+1}$
∞ Reihe, divergiert stärker als e^ρ.

Für spezielle Fälle bricht die Reihe ab, (bei $\nu = N+1$,
weil $a_{N+1} = b_{N+1} = 0$ $\quad N = 0, 1, 2, \ldots$)

$$\Rightarrow \quad b_N + \sqrt{\frac{m-E}{m+E}}\, a_N = 0$$ (das wäre toll)

$\Rightarrow$ normierbare Lösung für ψ

$$E = mc^2\left[1 + \frac{Z^2\alpha^2}{(s+N)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1+\left(\frac{Z\alpha}{s+N}\right)^2}}$$

Für $N \geq 1$ sind alle j und beide Paritäten erlaubt.

Für $N = 0$ ist nur $K = +1$ erlaubt.

Def. Hauptquantenzahl

$$n = N + j + \tfrac{1}{2} = 1, 2, \ldots$$

Für gegebenes n sind die möglichen Werte von j

$$j = \tfrac{1}{2}, \ldots, n - \tfrac{1}{2}$$

Für $j < n - \frac{1}{2}$ $\longrightarrow$ $K = \pm 1$ erlaubt

Für $j = n - \frac{1}{2}$ $\longrightarrow$ $K = +1$ nur erlaubt

$$E = mc^2 \left[1 + \frac{Z^2\alpha^2}{\left(n - (j+\frac{1}{2}) + \sqrt{(j+\frac{1}{2})^2 - Z^2\alpha^2}\right)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

hängt ab von n aber auch von j

Entwicklung ($\Rightarrow$ nichtrelat. QM) in α

$$E \approx mc^2 \left[1 - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{Z^2\alpha^2}{n^2}}_{\hat{=}\ \frac{R_y}{n^2}} - \frac{(Z\alpha)^4}{2n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right) + O(\alpha^6)\right]$$

(Teilchen, keine Antiteilchen)

neu

$$R_y = \frac{mc^2\alpha^2}{2} = \frac{me^4}{2\hbar^2}$$

1. Relativist. Korrektur, hebt Entartung der nichtrelat. Theorie teilweise auf

$\Rightarrow$ Feinstrukturaufspaltung

(Tabelle)

Erlaubte Werte

n	j	K	ℓ	m_j	Bezeichnung n "ℓ"
1	$1/2$	$+1$	0	$\pm\frac{1}{2}$	$1S_{1/2}$
2	$1/2$	$+1$	0	$\pm\frac{1}{2}$	$2S_{1/2}$ } bleibt Entartet
	$1/2$	-1	1	$\pm\frac{1}{2}$	$2P_{1/2}$
	$3/2$	$+1$	1	$\pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$	$2P_{3/2}$ } Entart. aufgehoben
3	$1/2$	$+1$	0		$3S_{1/2}$
	$1/2$	-1	1		$3P_{1/2}$
	$3/2$	$+1$	1		$3P_{3/2}$
	$3/2$	-1	2		$3D_{3/2}$
	$3/2$	$+1$	2	$\pm\frac{5}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$	$3D_{5/2}$

$j = \ell + \frac{K}{2}$

für Teilchen

$$E_{2P_{3/2}} - E_{2S_{1/2}} = 10950\ \text{Mhz}$$

war 0 im nichtrelativist. Grenzfall

G. 9 Foldy – Wouthuysen – Transformation

Herleitung relativ. Korrekturen, z. B. Spin-Bahn-Kopplung

Vier-Spinor → 2 Komp. Teilchen / → 2 Komp. Antiteilchen } gekoppelt durch $\vec{\alpha}\cdot\vec{p}$ im Hamilton

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}$$

F-W-Trafo macht H (approximativ) blockdiagonal

Bsp. freie Teilchen $\quad H = \vec{\alpha}\vec{p} + \beta m \quad (\hbar = c = 1)$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \xrightarrow[\text{Trafo}]{\text{unit.}} \psi = e^{-iS}\psi' \qquad \psi' = e^{iS}\psi$$

$$\longrightarrow i\frac{\partial}{\partial t}\psi' = H'\psi' \quad \text{mit} \quad H' = e^{iS}He^{-iS} - e^{iS}(i\partial_t e^{-iS})$$

für $S = S(t)$ wichtig

In Analogie zur Diag. des Hamilton:

$$H = B_x\sigma_x + B_z\sigma_z \xrightarrow{} H' = B_z'\sigma_z$$

Drehung $z' \parallel \vec{B}$

$$B_z' = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

$$e^{iS} = e^{i\varphi\sigma_y}$$

Ansatz $\quad e^{\pm iS} = e^{\pm\beta\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\vartheta} = \cos\vartheta \pm \beta\frac{\vec{\alpha}\vec{p}}{|\vec{p}|}\sin\vartheta$

mit $(\beta\vec{\alpha}\vec{p})^2 = -\vec{p}^{\,2}$

$$H' = e^{iS}He^{-iS} = \dots = \vec{\alpha}\vec{p}\left(\cos 2\vartheta - \frac{m}{|\vec{p}|}\sin 2\vartheta\right) + \beta m\left(\cos 2\vartheta + \frac{|\vec{p}|}{m}\sin 2\vartheta\right)$$

z.B. $\frac{c}{c^2}$ dazu $\Rightarrow$ Dimensions-los

für $\tan 2\vartheta = \frac{|\vec{p}|}{m}$

$$\Rightarrow H' = \beta m\left(\frac{m}{E} + \frac{\vec{p}^{\,2}}{mE}\right)$$

$$H' = \beta\sqrt{m^2+p^2} = \begin{pmatrix} +\sqrt{m^2+p^2}\,\mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{m^2+p^2}\,\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

für klein ϑ gilt

$$iS = \beta\,\frac{\vec\alpha\cdot\vec p}{|\vec p|}\,\vartheta \approx \beta\,\frac{\vec\alpha\cdot\vec p}{2m}$$

Teilchen im elektro-magnet. Potential

$$H = \vec\alpha\,(\vec p - e\vec A(\vec r)) + \beta m + e\phi(\vec r)$$
$$= \quad \mathcal{O} \quad + \beta m \quad + \mathcal{E}$$

„odd" ungerade, nebendiagonal

"even" = diagonal

Transformation mit

$$iS = \frac{\beta}{2m}\,\mathcal{O}$$

($S = S(t)$ Komplikation)