Bosonen Symmetrische
Fermionen Antisymmetr. } Es gibt beides.

Die Beobachtung ergibt: Fermionen haben Spin $\frac{1}{2}$ (halbzahlig)
Bosonen haben Spin 1 (ganzzahlig)

Verallgemeinerung für viele Teilchen

Bosonen: Basis

$$|\Psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{j!}}\{|1:n_1;2:n_2;\dots;j:n_j\rangle + |2:n_1;1:n_1;\dots;j:n_j\rangle + \dots \text{ (alle Permutationen) }\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{j!}} \sum_P P\,|1:n_1;2:n_2;\dots;j:n_j\rangle$$

Achtung: Normierung noch nicht vollständig

Fermionen

Zahl der Vertauschungen

$$|\Psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{j!}} \sum_P (-1)^p P\,|1:n_1;2:n_2;\dots;j:n_j\rangle$$

alle Permutationen

$$= \frac{1}{\sqrt{j!}} \det \begin{pmatrix} |1:n_1\rangle & |1:n_2\rangle & \cdots & |1:n_j\rangle \\ |2:n_1\rangle & |2:n_2\rangle & & |2:n_j\rangle \\ \vdots & & & \\ |j:n_1\rangle & |j:n_2\rangle & \cdots & |j:n_j\rangle \end{pmatrix}$$

Slater-Determinante

ist automatisch Eigenzustand von P mit EW −1

(Konsequenzen daraus: später)

Die einzige Information die aus der Symmetrisierung übrigbleibt ist, wie häufig jede Quantenzahl n_x vorkommt.

Bei **Bosonen** können die selben Quantenzahlen mehrfach vorkommen. (z.B. können <u>alle</u> Teilchen im Grundzustand sein)

Beispiel nicht-wechselwirkende Bosonen

$$H = \sum_{\alpha=1}^{N} H_\alpha \qquad H_\alpha |n\rangle_\alpha = E_n |n\rangle_\alpha$$

Grundzustand

$$|\psi\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P P\, |0\rangle_1 |0\rangle_2 \dots |0\rangle_N$$

$$H|\psi\rangle_S = N E_0 |\psi\rangle_S$$

$\Rightarrow$ Bose-Kondensation

Bei **Fermionen**:

Angenommen, 2 Teilchen wären im selben Zustand

$$|\psi\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:n;2:n\rangle - |2:n;1:n\rangle\right) = 0$$

$\lightning$ Pauli-Prinzip

2 Fermionen können nicht im selben Zustand sein.

$\Rightarrow$ Bei Bosonen kann jeder Zustand $|n_j\rangle$ bel. oft besetzt sein.

Bei Fermionen kann jeder Zustand $|n_j\rangle$ 0 oder 1 mal besetzt sein.

8.2 2te Quantisierung (Schwabl)

Notation: Einteilchenzustände $|i\rangle$: $i = 1, 2, \dots, \infty$

N Teilchen $\alpha = 1, 2, \dots, N$

nummerierte Teilchen $|i_1, i_2, \dots, i_N\rangle = |i_1\rangle |i_2\rangle \dots |i_\alpha\rangle_\alpha \dots |i_N\rangle_N$

ununterscheidbare Teilchen $\longrightarrow$ sym. oder antisym. Zustände

$$S_\pm |i_1, i_2, \dots, i_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (\pm)^P \, P \, |i_1, i_2, \dots, i_N\rangle$$

Zustände sind vollständig charakterisiert durch die Angabe wie häufig ein Zustand besetzt ist

$$n_i = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots & \text{Bosonen} \\ 0, 1 & \text{Fermionen} \end{cases}$$

Besetzungszahlendarstellung $|n_1, n_2, \dots\rangle =$

$= c \; S_\pm |i_1, i_2, \dots, i_N\rangle$

Normierung: wenn alle $n_i = 0$ oder 1 sind, dann ist $c = 1$

Sind jedoch manche $n > 1$, gibt es zusätzliche Beiträge beim Skalarprodukt $\Rightarrow$ je $n!$ Zustände gleich

$$\Rightarrow \quad |n_1, n_2, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! \, n_2! \, n_3! \dots}} \; S_\pm |i_1, i_2, \dots, i_N\rangle$$

Erzeuger und Vernichter für Bosonen

In Analogie zu Photonen oder Phononen definieren wir für Bose-Teilchen (auch mit Masse) Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren.

$$a_i^+ |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} \, |n_1, n_2, \dots, n_i + 1, \dots\rangle$$

$$a_i |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i} \, |\dots, n_i - 1, \dots\rangle$$

$$\Rightarrow \quad [a_i, a_j] = [a_i^+, a_j^+] = 0, \quad [a_i, a_j^+] = \delta_{ij}$$

Teilchenzahloperator $\hat{n}_i = a_i^+ a_i$ $\quad$ ($\Rightarrow$ Besetzungszahl)

W.W. freie Teilchen $\qquad H = \sum_\alpha H_\alpha$

$H_\alpha |i\rangle_\alpha = \varepsilon_i |i\rangle_\alpha$ (für Einzelprobleme)

$\Rightarrow$

$$H = \sum_i \varepsilon_i n_i = \sum_i \varepsilon_i a_i^+ a_i$$

Besetzungszahldarstellung

$$\hat{N} = \sum_i n_i = \sum_i a_i^+ a_i$$ Besetzungszahloperator

Allgemeiner 1-Teilchen-Operator $\quad T = \sum_\alpha t_\alpha$

t_α kann nichtdiagonal sein

$$(t_\alpha)_{ij} = {}_\alpha\langle i | t_\alpha | j\rangle_\alpha = {}_\alpha\langle j | t_\alpha | i\rangle_\alpha^* = t_{ij}$$

da Teilchen ununterscheidbar

$$t_\alpha = \sum_{ij} t_{ij} |i\rangle_\alpha {}_\alpha\langle j|$$

$$T = \sum_{ij} t_{ij} \sum_{\alpha=1}^{N} |i\rangle_\alpha {}_\alpha\langle j|$$

Es gilt: $\sum_\alpha |i\rangle_\alpha {}_\alpha\langle j | n_1, \dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle$

$$= n_j \underbrace{\frac{\sqrt{n_i+1}}{\sqrt{n_j}}}_{\text{Anpassen der Normierung}} |n_1, \dots, n_i+1, \dots, n_j-1, \dots\rangle$$

Summe, in der ein n_j verschwindet

$$= \sqrt{n_j}\sqrt{n_i+1}\, |n_1, \dots, n_i+1, \dots, n_j-1, \dots\rangle$$

$$= a_i^+ a_j |n_1, \dots, n_i, \dots, n_j \dots\rangle$$

Also $\sum_\alpha |i\rangle_\alpha {}_\alpha\langle j| = a_i^+ a_j$

$$\Rightarrow \boxed{T = \sum_{ij} t_{ij}\, a_i^+ a_j}$$

Analog für 2-Teilchen-Operator

$$H_1 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} V(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \qquad \text{(Wechselwirkung)}$$

$$\Rightarrow H_1 = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,m} \langle ij | V | km \rangle\, a_i^+ a_j^+ a_m a_k$$

Teilchen in Zustand stecken | Teilchen aus Zustand nehmen

Fermionen

$S_- | i_1, \dots, i_N \rangle$ Slater-Determinante

$\| $

$|n_1, n_2, \dots \rangle$ (bereits normiert, da $n_i \in \{0, 1\}$)

Erzeuger und Vernichter

$$S_- | i_1, \dots \rangle = c_{i_1}^+ c_{i_2}^+ \cdots |0\rangle$$

$$= - c_{i_2}^+ c_{i_1}^+ \cdots |0\rangle \qquad \Rightarrow (c_i^+)^2 = 0$$

Pauli

Allg. $|n_1, n_2, \dots \rangle = (c_1^+)^{n_1} (c_2^+)^{n_2} \cdots |0\rangle$

irgendeine feste Reihenfolge der Zustände

VZ-Wechsel

$$c_i^+ c_j^+ + c_j^+ c_i^+ = 0$$

Antikommutator

$$[c_i^+, c_j^+]_+ = \{c_i^+, c_j^+\} = 0$$

⋮

gleiche gilt für Vernichter

$$\{c_i, c_j\} = 0$$

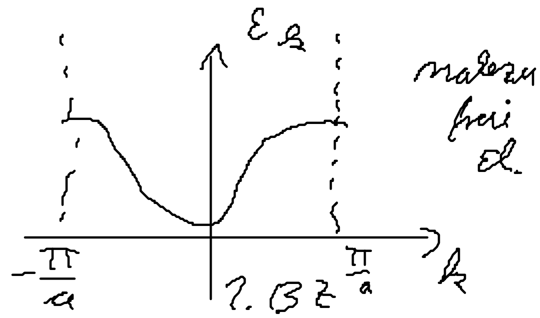
$$\Rightarrow \quad \{c_i, c_j^+\} = \delta_{ij}$$

Ein-Teilchen-op $\quad T = \sum_{ij} t_{ij}\, c_i^+ c_j$

Hamilton-Op. eines Festkörpers

$$H = H_{el} + H_{ph}$$

$$H_{el} = \sum_{k}\sum_{\sigma=\pm 1} \varepsilon_k\, c^+_{k\sigma} c_{k\sigma}$$

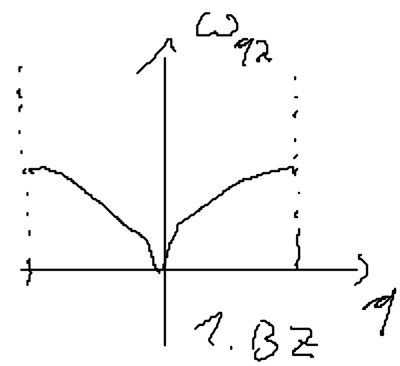


ebene Wellen

Energie, vgl. $\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, $\vec{k}$ = Wellenvektor

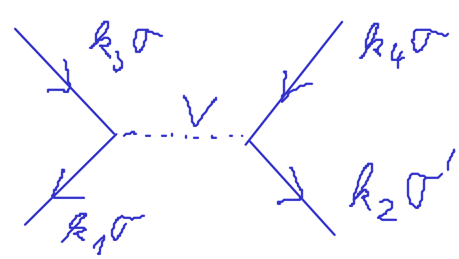
$$H_{ph} = \sum_{k\lambda} \hbar\omega_{q\lambda}\left(a^+_{q\lambda} a_{q\lambda} + \frac{1}{2}\right)$$

Energie,



$$H_{el-el} = \sum_{k_{1234}} V_{k_{1234}}\, c^+_{k_1\sigma} c^+_{k_2\sigma} c_{k_4\sigma} c_{k_3\sigma}$$

Bild:



$$H_{el-ph} = \sum_{kq\sigma\lambda} g\, c^+_{k+q\sigma} c_{k\sigma}\left(a_{q\lambda} + a^+_{-q\lambda}\right)$$