Spin - Algebra oder Drehimpuls

$\hat{=}$ Vertauschungsrelation

Spin-Modelle mit WW

$[S^+, S^-] = 2\hbar S^z$ $\qquad$ $S^x = \frac{1}{2}(S^+ + S^-)$

$[S^z, S^\pm] = \pm \hbar S^\pm$ $\qquad$ $S^y = \frac{1}{2i}(S^+ - S^-)$

(definition vgl. Folie)

Casimir-Operator

$$\vec{S}^2 = \vec{S}\cdot\vec{S} = S^{x2} + i S^{y2} + S^{z2}$$

wobei gilt $\quad [\vec{S}^2, S^\alpha] = 0 \qquad \alpha \in \{x, y, z\}$

Pauli-Matrix

$$\sigma_i^2 = \mathbb{1} \qquad i \in \{x, y, z\}$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\}_+ = 0 + 2\delta_{ij}$$

Antikommutator

$$\mathrm{Tr}(\sigma_i) = 0$$

Darstellung der Operatoren als Matrix

$$S^\pm |s, s^z\rangle = \underbrace{\sqrt{\underbrace{s(s+1)}_{=2 \text{ für Spin } 1} - s^z(s^z \pm 1)}}_{\text{Clebsch-Gordan Koeff.}} |s, s^z \pm 1\rangle$$

Wechselwirkung über magnet. Moment

$\Rightarrow$ gyromagnet. Moment

Zeeman-Energie $\qquad H = -\gamma \vec{B}\cdot\vec{S} \qquad$ $\downarrow\uparrow$ ist günstig

Austauschwechselwirkung

$$\vec{S}_{tot} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \qquad \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$$

$S = 0$ Singulett gerade E_S

$S = 1$ Triplett ungerade E_T

Bose - Statistik $|\psi(x_1, x_2)|^2 = |\psi(x_1, x_2)|^2$

Annahme ψ reell

$$\Rightarrow \quad \psi(x_1, x_2) = \pm \psi(x_2, x_1)$$

Bosonen ($+$), Fermionen ($-$)

$$\vec{S}^2_{tot} = s_{tot}(s_{tot}+1) = \vec{S}^a + \vec{S}^b + 2\vec{S}^a \vec{S}^b$$

$$s(s+1) = \frac{3}{4}$$

$$\vec{S}^a \vec{S}^b = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}\right) = \begin{cases} -\frac{3}{4} & \text{Singulett} \\ \frac{1}{4} & \text{Triplett} \end{cases}$$

effektive Hamilton

$$H^{eff} |S=0\rangle = E_S |S=0\rangle$$
$$H^{eff} |S=1\rangle = E_T |S=1\rangle$$

Ising 1D

($\hbar = 1$, dimensionslos)

$$\frac{H}{kT} = -g \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1} - h \sum_i \sigma_i$$

$$\sum_i \sigma_i + \sum_{i+1} \sigma_{i+1} = \sum_i (\sigma_i + \sigma_{i+1})$$

$$Z_N(T, B) = \sum_{\sigma_1 = 1}^{-1} \cdots \sum_{\sigma_N = 1}^{-1} T(\sigma_1, \sigma_2)\, T(\sigma_2, \sigma_3) \cdots T(\sigma_{N-1}, \sigma_N)\, T(\sigma_N, \sigma_1)$$

Periodische Randbedingung (PBC's)

Matrixelement

T Transfermatrix enthält Möglichkeiten der Kombinationen

$$(T)_{\sigma\sigma} = \begin{pmatrix} T_{++} & T_{+-} \\ T_{-+} & T_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 = 1 \quad \sigma_2 = 1 & \sigma_1 = 1 \quad \sigma_2 = -1 \\ \sigma_1 = -1 \quad \sigma_2 = 1 & \sigma_1 = -1 \quad \sigma_2 = -1 \end{pmatrix}$$

$$Z_N(T, B) = \sum_{\sigma_1 = -1}^{1} \left[\sum_{\sigma_2 = 1}^{-1} \cdots \sum_{\sigma_N = 1}^{-1} \langle \sigma_1 | T | \sigma_2 \rangle \times \right.$$

$$\left. \times \langle \sigma_2 | T | \sigma_3 \rangle \cdots \langle \sigma_N | T | \sigma_1 \rangle \right]$$

entspricht $\sum_{\sigma=-1}^{1} |\sigma\rangle\langle\sigma| = \mathbb{1}$

$$= \sum_{\sigma_1 = 1}^{-1} \langle \sigma_1 | T^N | \sigma_1 \rangle = \mathrm{Tr}(T^N)$$

Spezialfälle

① $J = 0 = g$

$\lambda_1 = 2 \cosh(h) \qquad \lambda_2 = 0$

② $B = h = 0$

$\lambda_1 = 2 \cosh(g)$

$\lambda_2 = 2 \sinh(g)$

Heisenberg-Modell

Néel-Zustand ist quatsch:

$$\vec{S}_1 \vec{S}_2 = S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y + S_1^z S_2^z$$

$$= \frac{1}{2}\left(S_1^+ S_2^- + S_1^- S_2^+\right) + S_1^z S_2^z$$

da $|\uparrow\downarrow\rangle \sim |\downarrow\uparrow\rangle$ = kein Eigenzustand