Spin-Modelle mit Wechselwirkungen

Leiteroperatoren $S^\pm$: $[S^+, S^-] = 2\hbar S^z$; $[S^z, S^\pm] = \pm\hbar S^\pm$

$S^x = \frac{1}{2}(S^+ + S^-)$

$S^y = \frac{1}{2}(S^+ - S^-)$

Casimir Operator $\hat{S}^2 = \hat{S}\hat{S} = \hat{S}^{x2} + \hat{S}^{y2} + \hat{S}^{z2}$

$[\hat{S}^2, S^\alpha] = 0 \qquad \alpha = x, y, z$

Pauli Matrizen

- $\sigma_i^2 = \mathbb{1} \qquad i \in \{x, y, z\}$
- $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 0 + 2\delta_{ij}$
- $\text{Spur}(\sigma_i) = 0$

$S^\pm |s, s^z\rangle = \sqrt{s(s+1) - s^z(s^z \pm 1)}\; |s, s^z \pm 1\rangle$

2 Fermionen mit Spin $\frac{1}{2}$

$\hat{S}_{tot} = \hat{S}^a + \hat{S}^b$ (analog Spin $\frac{1}{2} \hat{=}$) $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$ ($\hat{=}$ Spin 0 oder Spin 1)

$\frac{3}{2} \otimes 1 = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \oplus \frac{5}{2}$

Gesamtspin $\hat{S}_{tot}$	Ortswellenfkt	Energie
$S_{tot} = 0$ (Singlett)	ψ_s gerade	E_S
$S_{tot} = 1$ (Triplett)	ψ_t ungerade	E_T

$|\psi(x_1, x_2)|^2 = |\psi(x_2, x_1)|^2 \qquad \psi(x_1, x_2) \overset{\text{Bosonen}}{\underset{\text{Fermionen}}{=\pm}} \psi(x_2, x_1)$

$\hat{S}_{tot}^2 = S_{tot}(S_{tot} + 1) = \hat{S}^{a2} + \hat{S}^{b2} + 2\hat{S}^a \hat{S}^b$

$\hat{S}^a \hat{S}^b = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}\right) = \begin{cases} -\frac{3}{4} & \text{Singlett} \\ \frac{1}{4} & \text{Triplett} \end{cases}$

$H^{eff} |S_{tot} = 0\rangle = E_S |S_{tot} = 0\rangle$

$H^{eff} |S_{tot} = 1\rangle = E_T |S_{tot} = 1\rangle$

$H^{eff} = -2 \underset{\text{Austauschintegral}}{J} \hat{S}_a \hat{S}_b$

Ising Modell 1 dim

$$\frac{H}{kT} = -g \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1} - h \sum_i \sigma_i \qquad (\sigma = \pm 1)$$

$$Z_N(T,B) = \sum_{\sigma_1=+1}^{-1} \dots \sum_{\sigma_N=+1}^{-1} T(\sigma_1,\sigma_2)\, T(\sigma_2,\sigma_3) \cdot \dots \cdot T(\sigma_{N-1},\sigma_N) \cdot T(\sigma_N,\sigma_1)$$

$$= \sum_{\sigma_i=+1}^{-1} \left[\sum_{\sigma_2=+1}^{-1} \sum_{\sigma_3}^{-1} \dots \sum_{\sigma_N=1}^{-1} \langle \sigma_1 | T | \sigma_2 \rangle \langle \sigma_2 | T | \sigma_3 \rangle \dots \langle \sigma_N | T | \sigma_1 \rangle \right]$$

mit $\boxed{\sum_{\sigma=-1}^{1} |\sigma\rangle\langle\sigma| = \mathbb{1}}$

$$\boxed{Z_N(T,B) = \sum_{\sigma_1=+1}^{-1} \langle \sigma_1 | T^N | \sigma_1 \rangle = \mathrm{Spur}(T^N)}$$

Periodische Randbedingungen (PBC's)!

Matrix $\quad (T)_{\sigma\sigma'} = \begin{pmatrix} T_{++} & T_{+-} \\ T_{-+} & T_{--} \end{pmatrix} \qquad T_{++} \hat{=}\ \sigma=+1,\ \sigma'=+1$

$\qquad T_{+-} \hat{=}\ \sigma=+1,\ \sigma'=-1$

$$\Rightarrow \boxed{T_{\sigma_i\sigma_{i+1}} = \langle \sigma_i | T | \sigma_{i+1} \rangle}$$

$$U^+ T U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D \qquad U^+ U = U U^+ = \mathbb{1}$$

$$\mathrm{Spur}(U \underbrace{U^+ T U}_{D} \underbrace{U^+ T U}_{D} U^+ \dots U U^+ T) = \mathrm{Spur}(D^N)$$

zyklisch permutieren

$$\lambda_{1/2} = e^g \left(\cosh(h) \pm \sqrt{\sinh(h)^2 + e^{-4g}}\right)$$

Spezialfälle

- $J = 0 = g$: $\quad \lambda_1 = 2\cosh(h) \quad , \lambda_2 = 0$
- $B = 0 = h$: $\quad \lambda_1 = 2\cosh(g) \quad \lambda_2 = 2\sinh(g)$

Magnetisierung

kleine magnetisieren $\Rightarrow$ Unordnung

$\lim_{T\to 0}$ $\lim_{B\to 0}$ i.A nicht vertauschbar über das Ising Modell hinaus

$$\hat{S}_1 \hat{S}_2 = \hat{S}_1^x \hat{S}_2^x + \hat{S}_1^y \hat{S}_2^y + \hat{S}_1^z \hat{S}_2^z$$
$$= \frac{1}{2}\left(S_1^+ S_1^- + S_1^- S_2^+ \right) + S_1^z S_2^z$$

$\Rightarrow \quad |\uparrow_1 \downarrow_2 \rangle \longrightarrow |\downarrow_1 \uparrow_2 \rangle$

Néel Zustand $|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle$ kein Eigenzustand

Annahme falsch !