2. Quantisierung Zusammenfassung

1 Teilchen $$F^{(1)} = \sum_{ij} \langle i | f^{(1)} | j \rangle a_i^+ a_j$$

Bsp für $f^{(1)}$: Impuls, Spin, ...

2 Teilchen $$F^{(2)} = \sum_{iklm} \langle ik | f^{(2)} | lm \rangle a_i^+ a_k^+ a_m a_l$$

für Bosonen Reihenfolge egal

Bsp für $f^{(2)}$: Pot. Energie (Coulomb-ivnis Abstoßung)

Ein-Teilchen-Zustände

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\vec{r}} \delta_{\sigma,s}$$

z.B. $s=0$ $$|\vec{p}\rangle = \frac{e^{i\frac{\vec{p}\vec{r}}{\hbar}}}{\sqrt{V}}$$ Impuls $\vec{p} = \hbar\vec{r}$

Wechselwirkende Teilchen ohne Spin

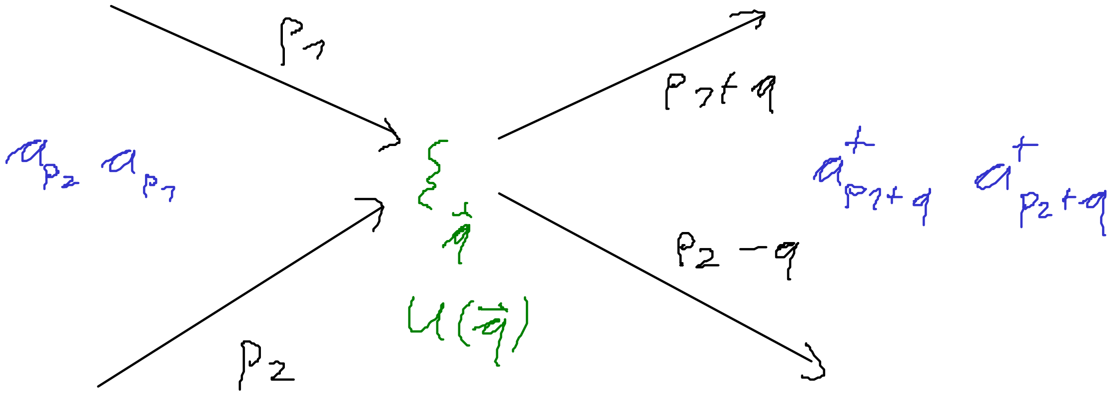
$$H = \sum_{n=1}^{N} \frac{\vec{p}_n^{\,2}}{2m} + \sum_{n<m} U(\vec{r}_n - \vec{r}_m)$$

umschreiben in 2te Quantisierung

$$H = \sum_p \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \sum_{p_1,p_2,p_3,p_4} \langle p_3, p_4 | U | p_1, p_2 \rangle a_{p_3}^+ a_{p_4}^+ a_{p_2} a_{p_1}$$

$$H = \sum_p \frac{p}{2m} a_p^+ a_p + \frac{1}{2V} \sum_{\vec{p}_1, \vec{p}_2, q} U(\vec{q})\, a_{p_1+q}^+ a_{p_2-q}^+ a_{p_2} a_{p_1}$$

$$U(\vec{q}) = \int d^3\vec{r}\, U(\vec{r})\, e^{-i\frac{\vec{q}\vec{r}}{\hbar}}$$



Quantenfeldtheorie

$$\Psi(x) = \sum_i \varphi_i(x)\, a_i \qquad \text{Feldoperator}$$

Ein-Teilchen-Wellenfkt.

x Koordinate und Spin

$$\Psi^+(x) = \sum_i \varphi_i^*(x)\, a_i^+$$

Eigenschaften der Felder

Benutze Eigenschaft der 1-Teilchen Wellenfkt.

$$\sum_i |i\rangle\langle i| = \mathbb{1} \qquad \text{(Vollständigkeit)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_i \varphi_i^*(x)\,\varphi_i(x) = \delta(x-x') = \delta(r-r')\,\delta_{\sigma\sigma'}$$

$$[\Psi(x),\Psi^+(x)] = \Psi(x)\,\Psi^+(x) - \Psi^+(x)\,\Psi(x)$$

$$= \sum_{ij} \varphi_i(x)\,\varphi_j^*(x')\, a_i a_j^+ - \sum_{ij} \varphi_j^*(x)\,\varphi_i(x')\, a_j^+ a_i$$

$$= \sum_{ij} \varphi_i(x)\,\varphi_j(x')\, \underbrace{[a_i, a_j^+]}_{\delta_{ij}} = \delta(x-x')$$

$$\langle i|i\rangle = 1 \Leftrightarrow \int dx\; \varphi_i(x)\,\varphi_i^*(x) = 1$$

$$F^{(1)} = \sum_{ij} \langle i | f^{(1)} | j \rangle a_i^+ a_j$$

$$= \sum_{ij} \int dx\, \varphi_i^*(x) f_x^{(1)} \varphi_j(x)\, a_i^+ a_j$$

$$= \int dx\, \Psi^+(x)\, f_x^{(1)}\, \Psi(x)$$

1) Bsp $f_x^{(1)} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

2) Bsp $f_x^{(1)} = \delta(x - x_0)$ (Wieviel Ψ ist in x_0 ?)

$$\Rightarrow \quad F^{(1)} = \Psi^+(x_0)\, \Psi(x_0)$$

Teilchendichte im Punkt x_0 $(\hat{=}\ r_0\, \sigma_0)$

$$F^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{iklm} \langle ik | f^{(2)} | lm \rangle a_i^+ a_k^+ a_m a_l$$

$$= \frac{1}{2} \iint dx_1\, dx_2\, \Psi^+(x_1)\, \Psi^+(x_2)\, f^{(2)}_{x_1 x_2}\, \Psi(x_2)\, \Psi(x_1)$$

Bsp $f^{(2)} = U(x_1 - x_2)$ // $U(r_1 - r_2)$

$U(\sigma_1 - \sigma_2)$

Spinlose Bosonen

$p^2 = -\hbar^2 \nabla^2$

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3r\, \Psi^+(\vec{r})\, \nabla^2\, \Psi(\vec{r})$$

$$+ \frac{1}{2} \int d^3r_1\, d^3r_2\, \Psi^+(\vec{r}_1)\, \Psi^+(\vec{r}_2)\, U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\, \Psi(\vec{r}_2)\, \Psi(\vec{r}_1)$$

Fermionen 2te Quantisierung

$|i\rangle$, $\varphi_i(x)$ 1-Teilchen-Zustand

$N_i = 0, 1$

$$|1_1, 1_2, \dots, 1_N\rangle = \left(\frac{1}{N!}\right)^{1/2} \sum_P (-1)^P\, \varphi_{P_1}(x_1)\, \varphi_{P_2}(x_2) \dots \varphi_{P_N}(x_N)$$

$$\{p_1 < p_2 < \ldots < p_N\} \longrightarrow (-1)^P = 1$$

$$F^{(1)} = \sum_\alpha f_{x\alpha}^{(1)}$$

nur besetzte Zustände aufgeschrieben

$$\langle 1_1, 1_2, \ldots | F^{(1)} | 1_1, \ldots 1_N \rangle$$

$$= \frac{1}{N!} \sum_{P\tilde{P}} (-1)^P (-1)^{\tilde{P}} \langle \tilde{p}_1 | f^{(1)} | p_1 \rangle \langle \tilde{p}_2 | p_2 \rangle \ldots \langle \tilde{p}_N | p_N \rangle$$

($\tilde{p} = p$ da sonst $\sum_{P\tilde{P}} = 0$)

$$= \frac{1}{N!} (N-1)! \sum_i \langle i | f^{(1)} | i \rangle = \frac{1}{N} \sum_i \langle i | f^{(1)} | i \rangle$$

$$\langle 1_1, \ldots, 1_N | F^{(1)} | 1_1, \ldots, 1_N \rangle = \sum_i \langle i | f^{(1)} | i \rangle$$

allgemein: auch unbesetzte Zustände

$$\langle \ldots | F^{(1)} | \ldots \rangle = \sum_i N_i \langle i | f^{(1)} | i \rangle$$

DAS WICHTIGSTE

$$\langle \ldots 1_i \ldots 0_j | F^{(1)} | \ldots 0_i \ldots 1_j \ldots \rangle = \langle i | f^{(1)} | j \rangle (-1)^{\Theta_{ij}}$$

$$\langle \ldots 1_i \ldots 0_j \ldots | f_{x_1} | \ldots 0_i \ldots 1_j \ldots \rangle$$

evtl. besetzte Zustände

$$= \frac{1}{N!} \sum_{P\tilde{P}} (-1)^P (-1)^{\tilde{P}} \langle \tilde{p}_1 | f^{(1)} | p_1 \rangle \langle \tilde{p}_2 | p_2 \rangle \ldots$$

$$= \frac{1}{N!} \sum_{P\tilde{P}} \langle i | f^{(1)} | j \rangle (-1)^P (-1)^{\tilde{P}}$$

$$= \frac{1}{N} \langle i | f^{(1)} | j \rangle (-1)^{\Theta_{ij}}$$

Zustand i und j auf Position 1 bringen
$\Rightarrow$ Permutationen

$$\Theta_{ij} = \sum_{k=i+1}^{j-1} N_k \qquad \text{\# Zustände zwischen } i \text{ und } j$$

$$a_i \, | \cdots 1_i \cdots \rangle = (-1)^{\Theta_{i\infty}} \, | \cdots 0_i \cdots \rangle$$

Zahl besetzte Zustände rechts von i

$$a_i^+ \, | \cdots 0_i \cdots \rangle = (-1)^{\Theta_{i\infty}} \, | \cdots 1_i \cdots \rangle$$

$$F^{(1)} = \sum_{ij} \langle i | f^{(1)} | j \rangle \, a_i^+ a_j$$

ABER $\{a_i, a_j^+\} = a_i a_j^+ + a_j^+ a_i = \delta_{ij}$

Ergebnis gilt wie bei Bosonen

$$F^{(2)} = \sum_{ijkl} \langle ij | f^{(2)} | kl \rangle \, a_i^+ a_j^+ a_l a_k$$

deswegen Reihenfolge!

Fermionen erzeugen $|1_1 \ldots 1_N\rangle$??

$$\Rightarrow \quad |1_1 \ldots 1_N\rangle = a_N^+ \cdots a_2^+ a_1^+ \, |0_1 \ldots 0_N\rangle$$

und $|0_1 \ldots 0_N\rangle = a_1 \cdots a_N \, |1_1 \ldots 1_N\rangle$

FiLo First in Last out