2-te Quantisierung Bosonen

$$\boxed{F^{(1)} = \sum_a f^{(1)}_{x_a}}$$

z.B. $f^{(1)} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

$f^{(2)} = U(\vec r_1 - \vec r_2)$

1 Teilchen $F^{(1)} = \sum_{ij} \langle i | f^{(1)} | j \rangle a_i^\dagger a_j$

2-Teilchen $F^{(2)} = \sum_{iklm} \langle ik | f^{(2)} | lm \rangle a_i^\dagger a_k^\dagger a_m a_l$

$$\boxed{F^{(2)} = \sum_{a<b} f^{(2)}_{ab}}$$

- Einteilchenzustände $|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i \vec k \vec r} \delta_{\sigma, s}$

z.B. $s=0$: $|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i \frac{\vec p \vec r}{\hbar}}$ mit Impuls $\boxed{\vec p = \hbar \vec k}$

$$\boxed{H = \sum_{n=1}^{N} \frac{\vec p_n^{\,2}}{2m} + \sum_{n<m} U(\vec r_n - \vec r_m)}$$

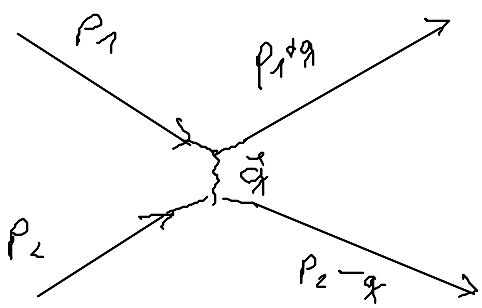
(Spinlose Bosonen)

- 2.te Quantisierung:

$$H = \sum_{\vec p} \frac{\vec p^{\,2}}{2m} a_{\vec p}^\dagger a_{\vec p} + \frac{1}{2} \sum_{p_1 p_2 p_3 p_4} \langle p_3 p_4 | U | p_1 p_2 \rangle a^\dagger_{p_3} a^\dagger_{p_4} a_{p_2} a_{p_1}$$

$$= \sum_{\vec p} \frac{p^2}{2m} a^\dagger_{\vec p} a_{\vec p} + \frac{1}{2} \frac{1}{V} \sum_{p_1 p_2 q} U(\vec q) a^\dagger_{p_1+q} a^\dagger_{p_2-q} a_{p_2} a_{p_1}$$

$$\boxed{U(\vec q) = \int d^3\vec r \; U(\vec r) e^{-i \frac{\vec q \vec r}{\hbar}}}$$



Übertragsimpuls $\vec q$

Impulserhaltung

Quantenfeld

Def: $\psi(x) = \sum_i \varphi_i(x) a_i$ $\qquad x = \vec r, \sigma$

konjugiertes Feld: $\psi^\dagger(x) = \sum_i \varphi_i^*(x) a_i^\dagger$

- Vollständigkeit $\sum_i |i\rangle\langle i| = \mathbb{1} \iff \sum_i \varphi_i^*(x) \varphi_i(x') = \delta(x-x') = \delta(\vec r - \vec r')\delta_{\sigma\sigma'}$

$$\boxed{[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}}$$

$$[\psi(x), \psi^\dagger(x')] = \psi(x)\psi^\dagger(x') - \psi^\dagger(x')\psi(x)$$

$$= \sum_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j^*(x') a_i a_j^\dagger - \sum_{ij} \varphi_j^*(x') \varphi_i(x) a_j^\dagger a_i$$

$$= \sum_i \varphi_i(x) \varphi_i^*(x') = \delta(x-x')$$

- Normierung $\langle i | i \rangle = \mathbb{1} = \int dx \, \varphi_i(x) \varphi_i^*(x) = 1$

$$F^{(1)} = \sum_{ij} \langle i | f^{(1)} | j \rangle a_i^+ a_j = \sum_{ij} \int dx\, \varphi_i^*(x) f_x^{(1)} \varphi_j(x)\, a_i^+ a_j$$

$$= \int dx\, \Psi^+(x) f_x^{(1)} \Psi(x)$$

① $\boxed{f_x^{(1)} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}}$ ② $\boxed{f_x^{(1)} = \delta(x-x_0)}$

② $F^{(1)} = \Psi^+(x_0)\Psi(x_0)$ Teilchendichte im Punkt x_0; (r_0, σ_0)

$$F^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{iklm} \langle ik | f^{(2)} | lm \rangle a_i^+ a_k^+ a_m a_l$$

$$= \frac{1}{2} \iint dx_1 dx_2\, \Psi^+(x_1) \Psi^+(x_2) f^{(2)}_{x_1 x_2} \Psi(x_2) \Psi(x_1)$$

z.B. $\boxed{f^{(2)} = U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}$

- **WW spinlose Bosonen:**

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \int d^3r\, \Psi^+(\vec{r}) \nabla^2 \Psi(\vec{r}) + \frac{1}{2} \iint dr_1 dr_2\, \Psi^+(\vec{r}_1) \Psi^+(\vec{r}_2) U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \Psi(\vec{r}_2) \Psi(\vec{r}_1)$$

$\boxed{n_p = a_p^+ a_p}$ $\boxed{\vec{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \quad \vec{p}^2 = -\hbar^2 \nabla^2}$

2-te Quantisierung Fermionen

1 Teilchen Zustände $|i\rangle$, $\varphi_i(x)$ $\qquad N_i = 0, 1$

Wellenfunktion $|1_1 1_2 1_3 \dots 1_N\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{N!}}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_P (-1)^P \varphi_{P_1}(x_1) \varphi_{P_2}(x_2) \dots \varphi_{P_N}(x_N)$

$$\{p_1 < p_2 < p_3 \dots < p_N\} \Rightarrow (-1)^P = 1$$

Einteilchenoperator $F^{(1)} = \sum_\alpha f^{(1)}_{x_\alpha}$

$$\langle 1_1 1_2 \dots | f^{(1)}_{x_1} | 1_1 \dots 1_N \rangle = \frac{1}{N!} \sum_P \sum_{\tilde{P}} (-1)^P (-1)^{\tilde{P}} \langle \tilde{p}_1 | f^{(1)} | p_1 \rangle \langle \tilde{p}_2 | p_2 \rangle \dots \langle \tilde{p}_N | p_N \rangle$$

$$= \frac{1}{N!} (N-1)! \sum_i \langle i | f^{(1)} | i \rangle = \frac{1}{N} \sum_i \langle i | f^{(1)} | i \rangle$$

$$\langle 1_1 1_2 \dots | F^{(1)} | 1_1 \dots 1_N \rangle = \sum_i \langle i | f^{(1)} | i \rangle$$

$$\langle \dots | F^{(1)} | \dots \rangle = \sum_i N_i \langle i | f^{(1)} | i \rangle$$

$$\langle \dots 1_i \dots 0_j | F^{(1)} | \dots 0_i \dots 1_j \rangle = \langle i | f^{(1)} | j \rangle (-1)^{\Theta_{ij}}$$

besetztes Zustand   unbesetzt.

$$\langle \dots 1_i \dots 0_j \dots | f^{(1)}_{x_1} | \dots 0_i \dots 1_j \rangle = \frac{1}{N!} \sum_{P\tilde{P}} (-1)^P (-1)^{\tilde{P}} \langle \tilde{p}_1 | f^{(1)} | p_1 \rangle \langle \tilde{p}_2 | p_2 \rangle \dots$$

$$= \frac{1}{N!} \sum_{P\tilde{P}} \langle i | f^{(1)} | j \rangle (-1)^P (-1)^{\tilde{P}}$$

$$\boxed{\Theta_{ij} = \sum_{k=i+1}^{k=j-1} N_k}$$

$$= \frac{1}{N} \langle i | f^{(1)} | j \rangle (-1)^{\theta_{ij}}$$

Vernichtungs- und Erzeugungs-Operatoren

$$a_i | \dots 1_i \dots \rangle = (-1)^{\theta_{i\infty}} | \dots 0_i \dots \rangle$$

$$a_i^+ | \dots 0_i \dots \rangle = (-1)^{\theta_{i\infty}} | \dots 1_i \dots \rangle$$

$$\boxed{a_i a_j^+ + a_j^+ a_i = \delta_{ij}}$$

$$a_i^+ a_j | \dots 1_i \dots 0_j \dots \rangle$$

$$a_i a_j^+ | \dots 1_i \dots 0_j \dots \rangle$$

$$F^{(1)} = \sum_{ij} \langle i | f^{(1)} | j \rangle a_i^+ a_j$$

$$F^{(2)} = \sum_{ijkl} \langle ij | f^{(2)} | kl \rangle a_i^+ a_j^+ a_l a_k$$

Wie kann man Zustand $|1_1 \dots 1_N\rangle$ erzeugen?

- Anzahl Zustände nach rechts bekannt

beginne mit $|0_1 \dots 0\rangle$

$$\Rightarrow |1_1 \dots 1_N\rangle = a_N^+ \dots a_2^+ a_1^+ |0_1 \dots 0\rangle \quad \text{(first in last out)}$$

$$|0 \dots 0\rangle = a_1 a_2 \dots a_N | 1 1 1 \dots \rangle$$