Bosonen

$$[\psi(x), \psi^+(x')]_- = \delta(x-x')$$

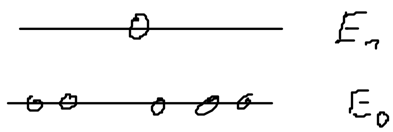
Fermionen

$$\{\psi(x), \psi^+(x')\}_+ = \delta(x-x')$$

Das Bose-Gas (verdünnt) mit schwacher Wechselwirkung

N. Bogolyubov (194x) (Quasi-Teilchen) $T=0$

$$E_p = \frac{p^2}{2m}$$



Anregung

Wechselwirkung

$$E = c\,p$$

Suprafluidität

$$H = \sum_k \varepsilon(k)\, a_k^+ a_k + \frac{1}{2V} \sum_{k,k',q} U(q)\, a_{k+q}^+ a_{k'-q}^+ a_{k'} a_k$$

$$\varepsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad U(q) = \int d^3r\, U(r)\, e^{-i\vec{q}\vec{r}}$$

wenn $U(r)$ kurzreichweitig ist $\Rightarrow$ $U(r) \propto \delta(r)$

$$\Rightarrow \quad U(q) = \text{const} = U$$

$$U(q) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = a_{k=0}, \quad a_0^+ = a_{k=0}^+$$

Teilchen im Grundzustand vernichten / erzeugen

$$a_0^+ a_0 |\phi_0\rangle = N |\phi_0\rangle$$

Grundzustand

$$a_k^+ a_k |\phi_0\rangle = 0 \qquad k \neq 0$$

$U(q) \neq 0$, schwach

$$a_0^+ a |\phi\rangle = N_0 |\phi\rangle \qquad N_0 < N$$

, noch makroskop.

$$\frac{N_0}{V} > 0$$

a_0 ist 'groß' im Vergleich zu $a_{k\neq 0}$

bzw $\underset{N_0+1}{\underbrace{a_0 a_0^+}} - \underset{N_0}{\underbrace{a_0^+ a}} = 1$ also $[a_0 a_0^+] \ll a_0 a_0^+$

ersetze also $a_0 = \sqrt{N_0}\, \cancel{e^{i\varphi}}$ und $a_0 = \sqrt{N_0}\, \cancel{e^{-i\varphi}}$

$\varphi = 0$ (statt N_0+1

(Ersetze Operator durch Eigenwert $\hat{=}$ Vernachlässige quantenmech. Eigenschaft)

Entwickle um a_0

$$H = \sum \epsilon(k)\, a_k^+ a_k +$$

$$+ \sum_{q\neq 0} \frac{U}{2V} \left(N_0^2 + N_0 \left(a_q^+ a_{-q}^+ + a_{-q} a_q + 4 a_q^+ a_q \right) + \cdots \right)$$

$O(\sqrt{N_0})$

benutze $N = N_0 + \sum_q a_q^+ a_q$

$$\Rightarrow \quad N_0 = N - \sum_q a_q^+ a_q$$

einsetzen

$$H = H_{kin} + \frac{U}{2V} \left(N - \sum_{q\neq 0} a_q^+ a_q \right)^2$$

$$+ \frac{U}{2V} \left(N - \sum_{q\neq 0} a_q^+ a_q \right) \sum_{k\neq 0} \left[a_k^+ a_{-k}^+ + a_{-k} a_k + 4 a_k^+ a_k \right]$$

$$= H_{kin} + \frac{U}{2V} \left[N^2 + 2N \sum_{k\neq 0} a_k^+ a_k + N \sum_{k\neq 0} \left(a_k^+ a_{-k}^+ + a_{-k} a_k \right) \right] + \cdots$$

$$= H_{kin} + Un \frac{N}{2} + Un \sum_{k\neq 0} a_k^+ a_k^+ + \frac{Un}{2} \sum_{k\neq 0} \left(a_k^+ a_{-k}^+ + a_{-k} a_k \right)$$

H diagonalisieren

$$H = \sum_k \varepsilon(k)\, a_k^+ a_k \Longrightarrow H = \sum \left(\varepsilon(k) - U n\right) a_k^+ a_k + \text{const}$$

+ Nebendiagonale

wie diagonalisieren ?

$$H = \sum_k E(k)\, \gamma_k^+ \gamma_k + \text{const}$$ wäre schön

=> Transformation gesucht

$\gamma = ?$

H liegt in quadratische Form vor => kann man diagonalisieren

$$a_k = \cosh(\theta)\, \gamma_k - \sinh(\theta)\, \gamma_{-k}^+ \qquad \theta(k)$$

$$a_k = -\sinh(\theta)\, \gamma_{-k} - \cosh(\theta)\, \gamma_k^+ \qquad \theta(-k) = \theta(k)$$

Bogol. Transf. $\cosh(\theta) = ch$, $\sinh(\theta) = sh$

Kommutator berechnen, um zu zeigen, dass γ gute Operatoren sind

$$[\gamma_k, \gamma_{k'}^+] = \delta(k-k'), \quad [\gamma_k, \gamma_{k'}] = 0$$

$$[a_k, a_{k'}] = 0 \quad \text{für } k \neq k' \neq -k$$

$$[a_k, a_k] = ch^2 [\gamma_k, \gamma_k] + sh^2 [\gamma_{-k}^+, \gamma_{-k}^+] - sh\, ch\, [\gamma_k, \gamma_{-k}^+] - sh\, ch\, [\gamma_{-k}^+, \gamma_k] = 0$$

$$[a_k, a_k^+] = -ch\, sh\, \overset{0}{[\gamma_k, \gamma_k]} + ch^2 \overset{1}{[\gamma_k, \gamma_k^+]} + sh^2 \overset{-1}{[\gamma_{-k}^+, \gamma_{-k}]} - sh\, ch\, \underset{0}{[\gamma_{-k}^+, \gamma_k^+]} = 1$$

usw.

einsetzen in H

$$H = \sum_k \left(\varepsilon(k) - Un\right) \left(-sh\, \gamma_{-k} + ch\, \gamma_k^+\right)\left(ch\, \gamma_k - sh\, \gamma_{-k}^+\right)$$
$$+ Un \frac{N}{2}$$
$$+ \frac{Un}{2} \sum_{k \neq 0} \Big[\left(-sh\, \gamma_{-k} + ch\, \gamma_k^+\right)\left(-sh\, \gamma_k + ch\, \gamma_{-k}^+\right)$$
$$+ \left(ch\, \gamma_{-k} - sh\, \gamma_k^+\right)\left(ch\, \gamma_k - sh\, \gamma_{-k}^+\right)\Big]$$

Terme sammeln

$$\gamma_{-k}\gamma_k : \quad (\varepsilon(k) + nU)(-sh\, ch) + \frac{Un}{2}(sh^2 + ch^2) \overset{!}{=} 0$$

es sollen keine $\gamma_{-k}\gamma_k$ - Terme vorkommen

$$sh^2 + ch^2 = \cosh(2\theta) \qquad \tanh(2\theta(k)) = \frac{Un}{\varepsilon(k) + Un}$$
$$2\, sh\, ch = \sinh(2\theta)$$

usw. $\Rightarrow$ nichtdiagonale Elemente verschwinden

$$\gamma_k \gamma_k^+ = 1 + \gamma_k^+ \gamma_k$$

einsetzen, H ist diagonal

$$E(k) = \sqrt{(\varepsilon(k) + Un)^2 - (Un)^2}$$

γ_k^+ Erzeugt neue Quasi-Teilchen

für $T = 0$ $\qquad \gamma_k^+ \gamma_k |\phi_0\rangle = 0$ $\qquad$ keine Quasi-Teilchen vorhanden

für $T > 0$ $\qquad \gamma_k^+ \gamma_k > 0$

Was ist deren Energie? $\qquad \varepsilon(k) = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$$\Rightarrow E(k) = \sqrt{2Un\,\varepsilon(k) + \cancel{\varepsilon(k)^2}}$$
$$= \sqrt{2Un \frac{\hbar^2 k^2}{2m}} = c|k|$$

$$c = \sqrt{2 U n \frac{\hbar}{2m}}$$

Schallgeschwindigkeit